GAZETA MATEMATICĂ

SERIA B

PUBLICAŢIE LUNARĂ PENTRU TINERET

Fondată în anul 1895

Anul CXXI nr. 2 **februarie 2016**

ARTICOLE ŞI NOTE MATEMATICE

ASUPRA UNOR ŞIRURI EXPRIMATE RECURENT

Marius Mâinea[1] şi Manuela Prajea[2]

Abstract. This work presents four sufficient conditions for the convergence of recurrently defined sequences and illustrates their use with problems taken from different contests.

Keywords: recurrent sequence, convergence

MSC: 40A05

Vom prezenta în cele ce urmează câteva probleme de convergenţă a unor şiruri exprimate prin relaţii de recurenţă de ordinul 2 sub formă de egalităţi sau inegalităţi. Ele au fost propuse de-a lungul timpului la faze superioare ale olimpiadelor şi concursurilor de matematică şi nu au un grad de dificultate neglijabil.

Punctul de plecare este o problemă dată la în anul 1977 în fosta URSS.

Fie $(x_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}$ *astfel încât şirul* $y_n = x_{n+1} - \dfrac{1}{2}x_n$ *este convergent la* 0*. Să se demonstreze că* x_n *tinde către zero.*

Vom demonstra pentru început patru propoziţii reprezentând condiţii suficiente de convergenţă, pe care le vom folosi în problemele enunţate.

Propoziţia 1. *Fie* $(x_n)_{n\geq 1}, (y_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}$ *două şiruri de nunere reale şi* $a \in (-1, 1)$ *astfel încât* $y_n = x_{n+1} - ax_n$ *este convergent către* l*. Atunci* x_n *este convergent către* $\dfrac{l}{1-a}$.

Demonstraţie. Vom arăta că x_n este mărginit. Într-adevăr, dacă $|y_n|$ este mărginit de M, atunci x_n este mărginit:

$$|x_{n+1}| \leq |x_{n+1} - ax_n| + |a||x_n| \leq M + |a||x_n| \leq M + |a|(M + |a||x_{n-1}|) \leq$$
$$\leq \ldots \leq M(1 + |a| + \ldots + |a|^{n-1}) + |a|^{n-1}|x_1| \leq M \cdot \frac{1}{1-|a|} + |x_1|.$$

[1] Profesor, Colegiul Naţional „Vladimir Streinu”, Găeşti.

[2] Profesor dr., Colegiul Naţional „Traian”, Drobeta Turnu Severin.

Aşadar x_n are limite extreme finite; notând $l_1 = \overline{\lim}\, x_n$ respectiv $l_2 = \underline{\lim}\, x_n$, deoarece $y_n + ax_n = x_{n+1}$, avem $l + al_1 = l_1$ şi $l + al_2 = l_2$, de unde

$$l_1 = l_2 = \frac{l}{1-a}.$$

Propoziţia 2. *Fie $(x_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}$ un şir mărginit şi a un număr real, $a \neq \pm 1$, astfel încât şirul $y_n = x_{n+1} - ax_n$ este convergent către l. Atunci x_n este convergent către $\frac{l}{1-a}$.*

Demonstraţie. Problema se reduce la cazul $l = 0$ înlocuind pe y_n cu $y_n - l$ şi pe x_n cu $x_n - \frac{l}{1-a}$.

Dacă α este un punct limită al lui x_n atunci acesta este finit şi există un subşir x_{k_n} al lui x_n care tinde către α. Din relaţia de recurenţă se obţine că $a\alpha$ şi $a^{-1}\alpha$ sunt, de asemenea, puncte limită şi, prin inducţie, $a^n\alpha$ şi $a^{-n}\alpha$ sunt puncte limită pentru orice n natural. Deducem că $\alpha = 0$, deci x_n tinde către 0.

Propoziţia 3. *Fie $(x_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}$ un şir mărginit inferior şi $p, q \in (0,1)$, $p + q = 1$, $p > q$, astfel încât $x_{n+1} \geq px_{n+2} + qx_n$. Atunci x_n este convergent.*

Demonstraţie. Avem succesiv relaţiile $px_{n+1} + qx_{n+1} \geq px_{n+2} + qx_n$, $px_{n+1} - qx_n \geq px_{n+2} - qx_{n+1}$, $x_{n+1} - \frac{q}{p}x_n \geq x_{n+2} - \frac{q}{p}x_{n+1}$, $a_n \geq a_{n+1}$ unde $a_n = x_{n+1} - \frac{q}{p}x_n$ pentru orice n număr natural. Se obţin două cazuri:

i) Dacă $a_n \geq 0$ pentru orice n, atunci a_n este convergent şi, conform **P1**, x_n este convergent.

ii) Dacă există n_0 astfel încât $a_{n_0} < 0$, atunci $a_n < 0$ pentru orice $n \geq n_0$, deci $x_{n+1} - \frac{q}{p}x_n < 0$, de unde $x_{n+1} < x_n$ pentru $n \geq n_0$ şi, pentru că x_n este mărginit inferior, x_n este convergent.

Propoziţia 4. *Fie $(x_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}$ un şir mărginit şi $p, q \in \mathbb{R}$, $p + q = 1$, $p \neq \pm q$, astfel încât $x_{n+1} \geq px_{n+2} + qx_n$. Atunci x_n este convergent.*

Demonstraţie. Demonstraţia se bazează pe aceeaşi idee cu cea de la propoziţia 3, aplicând **P2** şirului $a_n = x_{n+1} - \frac{q}{p}x_n$ care este mărginit şi descrescător.

Aplicaţii

Problema 1. *Arătaţi că şirul $(x_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}$ dat de*

$$x_1 = 0 \text{ şi } x_{n+1} = \lambda x_n + 2^{-n}n^2,$$

unde λ este un parametru real, $-1 < \lambda \leq 1$, este convergent.

Soluţie. i) $|\lambda| < 1$. Atunci $x_{n+1} - \lambda x_n = 2^{-n}n^2 \to 0$ pentru $n \to \infty$. Conform **P1** , $x_n \to 0$.

ii) $\lambda = 1$. Atunci $x_{n+1} = \frac{n^2}{2^n} + \frac{(n-1)^2}{2^{n-1}} + \ldots + \frac{1^2}{2^1} \to 6$ pentru $n \to \infty$.

Problema 2 (ONM 1990, *M. Chiriţă*). *Fie* $(a_n)_{n\geq 0} \subset \mathbb{R}$ *astfel încât*

$$\frac{1}{8}(6a_{n+1} - a_n) \leq a_{n+2} \leq \frac{1}{6}(5a_{n+1} - a_n)$$

pentru orice n natural. Arătaţi că $a_n \to 0$.

Soluţie. Fie $b_n = 2a_{n+1} - a_n$. Atunci $6a_{n+1} - a_n \leq 8a_{n+2}$ devine succesiv $2a_{n+1} - a_n \leq 4(2a_{n+2} - a_{n+1})$, $b_n \leq 4b_{n+1}$, deci

$$b_{n+1} \geq \frac{b_n}{4} \geq \ldots \geq \frac{b_0}{4^{n+1}}. \tag{1}$$

De asemenea $6a_{n+2} \leq 5a_{n+1} - a_n$ se scrie $3(2a_{n+2} - a_{n+1}) \leq 2a_{n+1} - a_n$, $3b_{n+1} \leq b_n$, deci

$$b_{n+1} \leq \frac{b_n}{3} \leq \ldots \leq \frac{b_0}{3^{n+1}}. \tag{2}$$

Din (1) şi (2) reiese $\frac{b_0}{4^n} \leq b_n \leq \frac{b_0}{3^n}$. Rezultă că $b_n \to 0$ de unde $2a_{n+1} - a_n \to 0$, $a_{n+1} - \frac{1}{2}a_n \to 0$ şi, conform **P1**, $a_n \to 0$.

Problema 3. *Determinaţi funcţiile injective* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *astfel încât* $3f(n) \geq 2f(f(n)) + n$ *pentru orice n, număr natural.*

Soluţie. Pentru k natural fixat definim $x_0 = k$ şi $x_{n+1} = f(x_n)$, $n \in \mathbb{N}$. Atunci $3x_{n+1} \geq 2x_{n+2} + x_n$, adică $x_{n+1} \geq \frac{2}{3}x_{n+2} + \frac{1}{3}x_n$, pentru orice n natural, deci, conform **P3**, x_n este convergent. Deoarece şirul are termeni naturali, el este constant de la un rang n_0, deci $x_{n_0} = x_{n_0+1} = \ldots$. Întrucât f este injectivă reiese $x_{n_0-1} = x_{n_0}, \ldots, f(k) = k$, deci f este funcţia identică.

Problema 4 (ONM 1976, *L. Panaitopol*). *Dacă şirul* $(x_n)_{n\geq 0} \subset \mathbb{R}$ *este mărginit şi* $x_{n+2} \leq \frac{x_n + x_{n+1}}{2}$ *pentru orice n număr natural, atunci* x_n *este convergent.*

Soluţia 1. Avem $x_{n+1} \geq 2x_{n+2} - x_n$ şi, aplicând **P4**, x_n este convergent.

Soluţia 2. Avem $x_{n+2} + \frac{1}{2}x_{n+1} \leq x_{n+1} + \frac{1}{2}x_n$ deci şirul $y_n = x_{n+1} + \frac{1}{2}x_n$ este descrescător şi mărginit inferior, deci convergent. Aplicând **P1**, x_n este convergent.

Problema 5 (SL-ONM 2015, *D. Marinescu, V. Cornea*). *Fie* $a \geq 0$, $a \neq 1$ *şi* $f : [0,1] \to [0,1]$ *o funcţie cu proprietatea* $f(f(x)) \leq (1+a)f(x) - ax$ *pentru orice x din* $[0,1]$. *Demonstraţi că şirul* $(x_n)_{n\geq 0}$ *definit prin* $x_0 = x$ *şi* $x_{n+1} = f(x_n)$ *este convergent.*

Soluţie. Avem $x_{n+2} \leq (1+a)x_{n+1} - ax_n$, deci $x_{n+1} \geq \frac{1}{a+1}x_{n+2} + {} + \frac{a}{a+1}x_n$. Luăm $p = \frac{1}{a+1}$, $q = \frac{a}{a+1}$, avem $p + q = 1$, $p \neq \pm q$ şi, aplicând **P4**, x_n este convergent.

Problema 6 (Concursul „N. Păun“, 2003). *Fie $(x_n)_{n\geq 1}, (y_n)_{n\geq 1}$ două şiruri de numere reale cu proprietăţile:*

i) $(x_n)_{n\geq 1}$ *este mărginit;*

ii) $y_n \to a$ *şi* $a \in (-1,1)$;

iii) $x_n - y_n x_{n+1} \to l$, *l finit.*

Atunci $x_n \to \dfrac{l}{1-a}(n\to\infty)$.

Soluţie. Notăm $z_n = y_n - a \to 0$. Atunci $y_n = z_n + a$ şi, ţinând cont că $z_n x_{n+1} \to 0$, $x_n - (z_n + a)x_{n+1} = (x_n - a x_{n+1}) - z_n x_{n+1} \to l$.

Rezultă $x_n - a x_{n+1} \to l$ şi, conform **P2**, $x_n \to \dfrac{l}{1-a}$.

Problema 7 (TST 2004, *Cristinel Mortici*). *Determinaţi funcţiile injective $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ cu proprietatea* $f(f(n)) \leq \dfrac{n+f(n)}{2}$.

Soluţie. Fie k un număr natural arbitrar, dar fixat şi $x_n = f^{(n)}(k)$ (unde $f^{(n)}$ înseamnă f compusă cu ea însăşi de n ori). Atunci $x_{n+2} \leq \dfrac{x_n + x_{n+1}}{2}$. Cum x_n este mărginit inferior de 0 şi superior de $\max\{x_0, x_1\}$ conform **P4**, x_n este convergent şi apoi, ca la problema 3, f este funţia identică.

Probleme propuse

1. (G.M.-B nr. 12/2005, *Dorinel Anca*). Fie $(x_n)_{n\geq 1}$ un şir mărginit astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty}\left(x_n + \dfrac{x_{3n}}{3}\right) = 1$. Arătaţi că $x_n \to \dfrac{3}{4}$.

2. (Concursul „Moisil“, 2011, Urziceni). Pentru fiecare număr natural n, fie funcţiile continue $y_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ astfel încât $y_0(x) = 1$ şi $y_{n+1}(x) = 2\displaystyle\int_0^x \sqrt{y_n(t)}\,\mathrm{d}t$ pentru orice x din $[0,1]$ şi n natural. Să se demonstreze că pentru orice a din $(0,1)$ şirul $(y_n(a))_{n\geq 1}$ este convergent către a^2.

3. (G.M.-B nr. 11/2014, *Marian Cucoaneş*). Fie $(x_n)_{n\geq 1}$ un şir de numere reale cu proprietatea că şirul $y_n = 9x_{n+2} - 12x_{n+1} + 4x_n$, $n \geq 1$, este convergent. Să se arate că şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este convergent.

4. (G.M.-B nr. 12/2014, *Nicolae Bourbăcuţ*). Se consideră şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definit prin $x_0, x_1 \in (1,\infty)$ şi $x_{n+1} = \log_3(1 + x_n + x_{n-1})$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Demonstraţi că şirul $\left(x_n + \dfrac{1}{2}x_{n-1}\right)_{n\geq 1}$, este convergent.

b) Demonstraţi că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$.

Biblografie

[1] C. Mortici, *Metoda punctelor limită pentru stabilirea convergenţei unor şiruri mărginite*, RMT 2/2004.

[2] Gazeta Matematică.

[3] Probleme propuse la ONM.

[4] Probleme avute în atenţia Comisiei ONM.