GAZETA MATEMATICĂ

SERIA B

PUBLICAŢIE LUNARĂ PENTRU TINERET

Fondată în anul 1895

Anul CXXI nr. 12 decembrie 2016

ARTICOLE ŞI NOTE MATEMATICE

DESPRE ECUAŢIA DE GRADUL TREI

Vasile Berghea[1)]

Abstract. This article presents a new method to solve the third degree equation, using a trynome equation as resolvente.

Keywords: third degree equation, trynome equation, bynome equation, resolvente, solutions.

MSC: 12E12

Articolul de faţă prezintă o metodă de transformare a unei ecuaţii de gradul trei într-o ecuaţie trinomă, astfel că aflarea rădăcinilor acestui tip de ecuaţii se reduce la rezolvarea unei ecuaţii mai simple, evitându-se calea greoaie a formulelor lui *Cardan*. Metoda are avantajul că se poate aplica direct oricărei ecuaţii de gradul trei cu coeficienţi în mulţimea numerelor complexe.

Fie ecuaţia de gradul trei cu coeficienţi în mulţimea numerelor complexe

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0. \tag{1}$$

Căutăm soluţii ale acestei ecuaţii de forma $x = z+\alpha z^{-1}+\beta$, $z, \alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

Prin calcul se obţine uşor că

$$x^2 = z^2 + \alpha^2 z^{-2} + 2\beta(z + \alpha z^{-1}) + 2\alpha + \beta^2$$

şi

$$x^3 = z^3 + \alpha^3 z^{-3} + 3\beta(z^2 + \alpha^2 z^{-2}) + (3\alpha + 3\beta^2)(z + \alpha z^{-1}) + 6\alpha\beta + \beta^3$$

pe care le înlocuim în ecuaţia (1) şi găsim

$$z^3+\alpha^3 z^{-3}+ (3\beta + a)(z^2+ \alpha^2 z^{-2}) +(3\alpha + 3\beta^2 + 2a\beta + b)(z + \alpha z^{-1})+ \\ +6\alpha\beta + \beta^3 + 2a\alpha + a\beta^2 + b\beta + c = 0. \tag{2}$$

[1)]Profesor, Liceul Teoretic „Gheorghe Lazăr“, Avrig.

Determinăm parametrii α şi β astfel încât $z^2+\alpha^2 z^{-2}$ şi $z+\alpha z^{-1}$ să aibă coeficienţii egali cu zero. Condiţiile sunt $3\beta+a=0$ şi $3\alpha+3\beta^2+2a\beta+b=0$, din care rezultă

$$\beta=-\frac{a}{3},\quad \alpha=\frac{a^2}{9}-\frac{b}{3}. \tag{3}$$

Introducând în (2) valorile găsite vom avea de rezolvat următoarea ecuaţie trinomă numită *rezolventa* ecuaţiei (1):

$$z^3+\left(\frac{a^2}{9}-\frac{b}{3}\right)^3 z^{-3}+\frac{2a^3}{27}-\frac{ab}{3}+c=0 \tag{4}$$

sau $z^6+mz^3+\alpha^3=0$ unde $m=\dfrac{2a^3}{27}-\dfrac{ab}{3}+c$, iar α este dat de (3). Notăm $z^3=t$ şi obţinem

$$t_{1,2}=\frac{-m\pm\sqrt{m^2-4\alpha^3}}{2}.$$

Soluţiile căutate sunt date de $x_k=z_k+\alpha z_k^{-1}-\dfrac{a}{3}$, $k\in\{0,1,2\}$, unde z_k, $k\in\{0,1,2\}$, reprezintă rădăcinile ecuaţiei binome $z^3=t_1$ sau ale ecuaţiei $z^3=t_2$. Dacă notăm $\arg t_1=\theta_1$ şi $\arg t_2=\theta_2$ putem scrie soluţiile ecuaţiei (1) în forma lor cea mai generală astfel:

$$x_k=\sqrt[3]{|t_1|}\left(\cos\frac{\theta_1+2k\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{\theta_1+2k\pi}{3}\right)+$$
$$+\frac{\alpha}{\sqrt[3]{|t_1|}}\left(\cos\frac{\theta_1+2k\pi}{3}-\mathrm{i}\sin\frac{\theta_1+2k\pi}{3}\right)-\frac{a}{3},\ k\in\{0,1,2\}.$$

Mai observăm că din $t_1t_2=\alpha^3$ rezultă $t_2=\dfrac{\alpha^3}{t_1}$, ceea ce ne arată că între rădăcinile celor două ecuaţii binome $z^3=t_1$ şi $z^3=t_2$ există relaţia $z'=\dfrac{\alpha}{z}$. În concluzie găsim aceleaşi soluţii x_k dacă ne folosim în calculul lor de rădăcinile celeilalte ecuaţii binome $z^3=t_2$, astfel încât putem scrie şi

$$x_k=\sqrt[3]{|t_2|}\left(\cos\frac{\theta_2+2k\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{\theta_2+2k\pi}{3}\right)+$$
$$+\frac{\alpha}{\sqrt[3]{|t_2|}}\left(\cos\frac{\theta_2+2k\pi}{3}-\mathrm{i}\sin\frac{\theta_2+2k\pi}{3}\right)-\frac{a}{3},\ k\in\{0,1,2\}.$$

Formulele lui *Cardan* se obţin pentru $a=0$, $b=p$, $c=q$, $p,q\in\mathbb{R}$ şi după un calcul destul de uşor deducem că una din rădăcini este

$$x_0=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}},$$

etc.

În particular, dacă $a^2 = 3b$, atunci $\alpha = 0$ şi prin transformarea $x = z - \dfrac{a}{3}$ ecuaţia rezolventă are forma unei ecuaţii binome $z^3 = \dfrac{a^3}{27} - c$, cu soluţiile $z_k, k \in \{0,1,2\}$, iar pentru (1) rădăcinile vor fi

$$x_k = z_k - \frac{a}{3} = \sqrt[3]{\left|\frac{a^3}{27} - c\right|}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{\theta + 2k\pi}{3}\right) - \frac{a}{3}, k \in \{0,1,2\}$$

unde $\theta = \arg\left(\dfrac{a^3}{27} - c\right)$.

Să analizăm câteva exemple.

1. Rezolvăm ecuaţia $x^3 + 3x^2 + 4 = 0, x \in \mathbb{C}$.

Avem $a = 3$, $b = 0$, $c = 4$. Din $3\beta + a = 0$ şi $3\alpha + 3\beta^2 + 2a\beta + b = 0$ rezultă $\beta = -1, \alpha = 1$ şi $m = 6$.

Vom avea de analizat ecuaţia trinomă $z^6 + 6z^3 + 1 = 0$. Notând $z^3 = t$ avem $t^2 + 6t + 1 = 0$, din care obţinem $t_{1,2} = -3 \pm 2\sqrt{2}$. Rezolvând ecuaţia $z^3 = -3 + 2\sqrt{2}$ găsim

$$z_k = \sqrt[3]{3 - 2\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\pi + 2k\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi + 2k\pi}{3}\right), k \in \{0,1,2\},$$

iar soluţiile căutate vor putea fi scrise

$$\begin{aligned} x_k = z_k + z_k^{-1} - 1 = \sqrt[3]{3 - 2\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\pi + 2k\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\tfrac{\pi + 2k\pi}{3}\right) + \\ + \sqrt[3]{3 + 2\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\pi + 2k\pi}{3} - \mathrm{i}\sin\frac{\pi + 2k\pi}{3}\right) - 1,\ k \in \{0,1,2\}. \end{aligned}$$

Am ţinut cont că $\arg t_1 = \arg\left(-3 + 2\sqrt{2}\right) = \theta_1 = \pi$.

Rădăcina reală se obţine pentru $k = 1$, rezultând

$$x_1 = -\sqrt[3]{3 - 2\sqrt{2}} - \sqrt[3]{3 + 2\sqrt{2}} - 1,$$

celelalte două fiind nereale, date de

$$x_{0,2} = -1 + \frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{3 - 2\sqrt{2}} + \sqrt[3]{3 + 2\sqrt{2}}\right) \pm \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\sqrt[3]{3 - 2\sqrt{2}} - \sqrt[3]{3 + 2\sqrt{2}}\right).$$

2. Rezolvăm ecuaţia $x^3 + 3\mathrm{i}x^2 - 3(2 + \mathrm{i})x + 2 - 7\mathrm{i} = 0,\ x \in \mathbb{C}$.

Avem $a = 3\mathrm{i}$, $b = -3(2 + \mathrm{i})$, $c = 2 - 7\mathrm{i}$. Din condiţiile $3\beta + a = 0$ şi $3\alpha + 3\beta^2 + 2a\beta + b = 0$ rezultă $\beta = -\mathrm{i}$, $\alpha = 1 + \mathrm{i}$ şi $m = -(1 + 3\mathrm{i})$. Suntem conduşi la rezolvarea ecuaţiei trinome $z^6 - (1 + 3\mathrm{i})z^3 - 2 + 2\mathrm{i} = 0$. Notând $z^3 = t$ avem $t^2 - (1 + 3\mathrm{i})t - 2 + 2\mathrm{i} = 0$, din care obţinem $t_{1,2} = \dfrac{1 + 3\mathrm{i} \pm (1 - \mathrm{i})}{2}$. Deducem că $t_1 = 2\mathrm{i}$ şi $t_2 = 1 + \mathrm{i}$.

Rezolvând $z^3 = 2\mathrm{i}$ găsim (exprimăm argumentele în grade):

$$z_k = \sqrt[3]{2}\left[\cos\left(30^0 + k \cdot 120^0\right) + \mathrm{i}\sin\left(30^0 + k \cdot 120^0\right)\right],\ k \in \{0,1,2\}.$$

În final avem

$$x_k = z_k + \frac{\alpha}{z_k} + \beta = \sqrt[3]{2}\,[\cos(30^\circ + k\cdot 120^\circ) + \mathrm{i}\sin(30^\circ + k\cdot 120^\circ)] +$$
$$+\frac{\sqrt{2}\,(\cos 45^\circ + \mathrm{i}\sin 45^\circ)}{\sqrt[3]{2}\,[\cos(30^\circ + k\cdot 120^\circ) + \mathrm{i}\sin(30^\circ + k\cdot 120^\circ)]} - \mathrm{i},\ k\in\{0,1,2\}$$

sau

$$x_k = \sqrt[3]{2}\,[\cos(30^\circ + k\cdot 120^\circ) + \mathrm{i}\sin(30^\circ + k\cdot 120^\circ)] +$$
$$+\sqrt[6]{2}\,[\cos(15^\circ - k\cdot 120^\circ) + \mathrm{i}\sin(15^\circ - k\cdot 120^\circ)] - \mathrm{i},\ k\in\{0,1,2\}.$$

În acest exemplu toate rădăcinile sunt complexe nereale:

$$x_0 = \sqrt[3]{2}\cos 30^\circ + \sqrt[6]{2}\cos 15^\circ + \mathrm{i}\left(\sqrt[3]{2}\sin 30^\circ + \sqrt[6]{2}\sin 15^\circ - 1\right)$$

$$x_1 = \sqrt[3]{2}\cos 150^\circ + \sqrt[6]{2}\cos 105^\circ + \mathrm{i}\left(\sqrt[3]{2}\sin 150^\circ - \sqrt[6]{2}\sin 105^\circ - 1\right),$$

$$x_2 = \sqrt[6]{2}\cos 225^\circ - \mathrm{i}\left(\sqrt[3]{2} + \sqrt[6]{2}\sin 225^\circ + 1\right).$$

3. Rezolvăm ecuaţia $x^3 - 3x + 2\cos\varphi = 0$, $\varphi\in\mathbb{R}$.

În cartea „*Surprize în matematica elementară*" scrisă de *Viorel Gh. Vodă* este rezolvată această ecuaţie prin formulele lui *Cardan*, se arată că toate rădăcinile sunt reale şi se indică una din rădăcini sub forma

$$x_1 = \sqrt[3]{\mathrm{i}\cos\varphi - \sin\varphi} - \sqrt[3]{\mathrm{i}\cos\varphi + \sin\varphi}\,.$$

Să rezolvăm prin metoda dată mai sus şi să căutăm soluţii de forma $x = z + \alpha z^{-1} + \beta$, $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$. Avem $a = 0$, $b = -3$, $c = 2\cos\varphi$. Din condiţiile $3\beta + a = 0$ şi $3\alpha + 3\beta^2 + 2a\beta + b = 0$ rezultă $\beta = 0, \alpha = 1$ şi $m = 2\cos\varphi$. Ajungem astfel la ecuaţia trinomă $z^6 + (2\cos\varphi)z^3 + 1 = 0$.

Notând $z^3 = t$ avem $t^2 + (2\cos\varphi)t + 1 = 0$ din care obţinem

$$t_{1,2} = -\cos\varphi \pm \mathrm{i}\sin\varphi.$$

Rezolvând $z^3 = -\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi$ găsim

$$z_k = \cos\frac{-\varphi + (2k+1)\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{-\varphi + (2k+1)\pi}{3},\ k\in\{0,1,2\}.$$

În sfârşit, soluţiile vor fi

$$x_k = z_k + z_k^{-1} = 2\cos\frac{-\varphi + (2k+1)\pi}{3},\ k\in\{0,1,2\}.$$

Acest exemplu arată cel mai bine avantajul metodei prezentate în articolul de faţă.

Ca exerciţiu vă propun să rezolvaţi aceleaşi ecuaţii folosind soluţiile ecuaţiei binome $z^3 = t_2$.

Pentru istoric şi metode de rezolvare a ecuaţiei de gradul al treilea recomandăm cititorilor lucrarea [2].

Bibliografie

[1] M. Ghermănescu, *Asupra ecuaţiei de gradul al treilea*, G.M. nr. 1/1930.
[2] M. Iosifescu, *Rezolvarea ecuaţiei de gradul al treilea*, G.M. nr. 7/1955.
[3] V. Gh. Vodă, *Surprize în matematica elementară*, Ed. Albatros, 1981.