PENTRU CERCURILE DE ELEVI

O PROBLEMĂ DE CONCURS

Gabriel Narcis Vrânceanu[1)]

Obiectul acestei lecţii este discutarea unei probleme de la Olimpiada Naţională de Matematică 2016. Chiar dacă problema nu este dificilă, consider că, prin multitudinea de soluţii posibile, rezolvările prezentate constituie un bun exemplu de abordare a unei probleme de concurs.

Problema 2, ONM 2016, clasa a VI-a. *Determinaţi numerele naturale nenule a şi b pentru care*

$$\frac{a+1}{b} \text{ şi } \frac{b+2}{a}$$

sunt simultan numere naturale.

Soluţia 1 – *bazată pe estimarea mărimii numărătorilor şi numitorilor.* Cum a şi b sunt numere naturale nenule rezultă că $a+1$ şi $b+2$ sunt nenule deci condiţia $\frac{a+1}{b}$ şi $\frac{b+2}{a}$ sunt simultan numere naturale implică $a+1 \geqslant b$ şi $b+2 \geqslant a$, ceea ce conduce fie la dubla inegalitate $a-2 \leqslant b \leqslant a+1$, (1), fie la $b-1 \leqslant a \leqslant b+2$, (1').

În ambele cazuri, ţinând cont de faptul că expresiile obţinute sunt numere întregi, problema evidenţiază câte patru cazuri:

(1) implică $b \in \{a-2, a-1, a, a+1\}$, (2)

(1') implică $a \in \{b-1, b, b+1, b+2\}$, (2').

Cum procedeul următor este aplicabil oricăruia dintre cazuri, continuăm cu dezvoltarea cazuisticii din (2).

Cazul (2.1): $b = a-2 \geqslant 1$ implică $\frac{a+1}{a-2} \in \mathbb{N}^*$, din care rezultă în mod necesar ca $a-2 \mid a+1$. Cum $a-2 \mid a-2$ rezultă că $a-2 \mid 3$, condiţie care implică doar cazurile:

• $a-2=1$, deci $a=3$, ceea ce conduce la $b=1$; soluţia corespunzătoare cazului este $a=3$, $b=1$;

• $a-2=3$, deci $a=5$, ceea ce conduce la $b=3$; soluţia corespunzătoare cazului este $a=5$, $b=3$.

Cazul (2.2): $b = a-1 \geqslant 1$ implică $\frac{a+1}{a-1} \in \mathbb{N}^*$ şi $\frac{a+1}{a} \in \mathbb{N}^*$, de unde, ţinând cont de a doua fracţie, rezultă în mod necesar ca $a \mid a+1$. Cum $a \mid a$ rezultă că $a \mid 1$, condiţie care implică doar cazul $a=1$, ceea ce conduce la $b=0$, care nu convine condiţiilor problemei.

Cazul (2.3): $b = a \geqslant 1$ implică $\frac{a+1}{a} \in \mathbb{N}^*$ şi $\frac{a+2}{a} \in \mathbb{N}^*$, de unde, ţinând cont de a prima fracţie, rezultă în mod necesar ca $a \mid a+1$. Cum

[1)]Profesor, Colegiul Naţional „B. P. Haşdeu", Bucureşti

$a \mid a$, rezultă că $a \mid 1$, condiţie care implică doar cazul $a = 1$ ceea ce conduce la $b = 1$ şi care verifică şi condiţia corespunzătoare celei de-a doua fracţii; soluţia corespunzătoare cazului este $a = 1$, $b = 1$;

Cazul (2.4): $b = a + 1 \geqslant 2$ implică $\dfrac{a+3}{a} \in \mathbb{N}^*$, din care rezultă în mod necesar ca $a \mid a + 3$. Cum $a \mid a$, rezultă că $a \mid 3$, condiţie care implică doar cazurile:

• $a = 1$, ceea ce conduce la $b = 2$; soluţia corespunzătoare cazului este $a = 1$, $b = 2$;

• $a = 3$, ceea ce conduce la $b = 4$; soluţia corespunzătoare cazului este $a = 3$, $b = 4$.

Soluţia 2 – *bazată pe studierea unor cazuri rezultate din observarea fracţiilor care trebuie analizate.*

Cazul 1: $a = b \geqslant 1$.

În acest caz, condiţia problemei se rescrie $\dfrac{a+1}{a} \in \mathbb{N}^*$ şi $\dfrac{a+2}{a} \in \mathbb{N}^*$, care corespunde cazului (2.3), deci implicând aceeaşi concluzie: mulţimea soluţiilor asociate cazului este vidă.

Cazul 2: $a > b \geqslant 1$.

Cum $\dfrac{b+2}{a} \in \mathbb{N}^*$, rezultă că $a = b+1$ – corespunzător cazului (2.2), sau $a = b+2$ – corespunzător cazului (2.1) , generând aceeaşi abordare prezentată anterior şi aceleaşi soluţii;

Cazul 3: $b > a \geqslant 1$.

Cum $\dfrac{a+1}{b} \in \mathbb{N}^*$, rezultă că $b = a + 1$ – corespunzător cazului (2.4), generând aceeaşi abordare prezentată anterior şi aceleaşi soluţii.

Soluţia 3 – *bazată pe transcrierea algebrică a condiţiei ca fracţiile să fie numere întregi.*

$\dfrac{a+1}{b} \in \mathbb{N}^*$ şi $\dfrac{b+2}{a} \in \mathbb{N}^*$ implică faptul că există $m, n \in \mathbb{N}*$ astfel încât $a + 1 = mb$ şi $b + 2 = na$, echivalente cu $mb - a = 1$ şi $na - b = 2$, de unde, prin adunarea membru cu membru a egalităţilor, rezultă

$$a(n-1) + b(m-1) = 3, \ (3).$$

Condiţia (3) generează la rându-i 4 cazuri:

Cazul 1: $a(n-1) = 0$ şi $b(m-1) = 3$

Cum $a \neq 0$ rezultă $n - 1 = 0$, deci $n = 1$, ceea ce implică $b + 2 = a$, corespunzător cazului (2.1), generând soluţia $a = 3$, $b = 1$, corespunzătoare lui $m = 4$, respectiv $a = 5$, $b = 3$, corespunzătoare lui $m = 2$.

Cazul 2: $a(n-1) = 1$ şi $b(m-1) = 2$

În condiţiile problemei, rezultă că $a = 1$şi $n = 2$, ceea ce implică $b+2 = 2$, deci $b = 0$, deci acest caz admite mulţimea vidă ca mulţime a soluţiilor.

Cazul 3: $a(n-1) = 2$ şi $b(m-1) = 1$

În condiţiile problemei rezultă că $b = 1$ şi $m = 2$, ceea ce implică $a + 1 = 2$, deci $a = 1$, deci acest caz generează soluţia $a = 1$, $b = 1$, corespunzătoare lui $n = 3$.

Cazul 4: $a(n - 1) = 3$ şi $b(m - 1) = 0$

Cum $b \neq 0$ rezultă $m - 1 = 0$, deci $m = 1$, ceea ce implică $a + 1 = b$, corespunzător cazului (2.4), generând soluţia $a = 1$, $b = 2$, corespunzătoare lui $n = 4$, respectiv $a = 3$, $b = 4$, corespunzătoare lui $n = 2$.

Soluţia 4 – bazată pe studierea valorilor posibile ale fracţiilor.

$\frac{a+1}{b} \in \mathbb{N}^*$şi $\frac{b+2}{a} \in \mathbb{N}^*$ generează următoarea cazuistică:

Cazul 1: $\frac{a+1}{b} = 1$ implică $b = a + 1$, deci corespunzător cazului (2.4) din soluţia 1, generând aceeaşi abordare prezentată anterior şi aceleaşi soluţii: $a = 1$, $b = 2$, respectiv $a = 3$, $b = 4$

Cazul 2: $\frac{b+2}{a} = 1$ implică $b = a - 2$, deci corespunzător cazului (2.1) din soluţia 1, generând aceeaşi abordare prezentată anterior şi aceleaşi soluţii: $a = 3$, $b = 1$, respectiv $a = 5$, $b = 3$

Cazul 3: $\frac{a+1}{b} \geqslant 2$ şi $\frac{b+2}{a} \geqslant 2$ implică $a + 1 \geqslant 2b$ şi $b + 2 \geqslant 2a$, de unde rezultă $b + 4 \geqslant 4b$, deci $3b \leqslant 4$, singura valoare convenabilă fiind $b = 1$, implicând $2a \leqslant 3$, deci regăsindu-se soluţia $a = 1$, $b = 1$

Soluţia 5 – bazată pe analizarea parităţii necunoscutelor.

Astfel, se remarcă faptul că b şi $b+2$ reprezintă expresii care au aceeaşi paritate, iar a şi $a + 1$ au parităţi diferite.

În acest context, dacă a ar fi par, atunci $b + 2$ trebuie să fie par, deci b par, ceea ce implică $a + 1$ par, contradicţie.

O concluzie necesară este că domeniul de admisibilitate pentru valorile asociate lui a este cel mult mulţimea numerelor naturale impare. Observaţia poate fi utilizată în contextul abordării pe următoarele cazuri:

Cazul 1: $a = 1$ implicând $\frac{2}{b} \in \mathbb{N}^*$ şi $\frac{b+2}{1} \in \mathbb{N}^*$, de unde $b = 1$, respectiv $b = 2$; regăsim astfel soluţiile $a = 1$, $b = 1$, respectiv $a = 1$, $b = 2$

Cazul 2: $a = 3$ implicând $\frac{4}{b} \in \mathbb{N}^*$ şi $\frac{b+2}{3} \in \mathbb{N}^*$, de unde $b = 1$, respectiv $b = 4$; regăsim astfel soluţiile $a = 3$, $b = 1$, respectiv $a = 3$, $b = 4$

Cazul 3: $a = 5$ implicând $\frac{6}{b} \in \mathbb{N}^*$ şi $\frac{b+2}{5} \in \mathbb{N}^*$, de unde $b = 3$; regăsim astfel soluţia $a = 5$, $b = 3$

La acest moment, utilizând faptul că $\frac{a+1}{b} \in \mathbb{N}^*$şi $\frac{b+2}{a} \in \mathbb{N}^*$ implică faptul că există $m, n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $a + 1 = mb$ şi $b + 2 = na$, rezultă că $(\underbrace{mn - 1}_{>0})a = 2m + 1 \geqslant 3$ (*), ceea ce implică $a = \frac{2m+1}{mn-1}$. De asemenea se poate remarca faptul că relaţia (*) nu este verificată în cazul $m = n = 1$.

Dacă $a \geqslant 7$ atunci $\dfrac{2m+1}{mn-1} \geqslant 7$, echivalent cu $m(7n-2) \leqslant 8$.

Pe de altă parte, din ipotezele problemei şi ţinând cont că nu convine cazul $m = n = 1$, rezultă că minimul expresiei $m(7n-2)$ se realizează pentru cazul $m = 2, n = 1$, deci $m(7n-2) \geqslant 10$, de unde rezultă că $a \geqslant 7$ nu convine ipotezelor, fapt care argumentează că cele 3 cazuri prezentate anterior sunt singurele care generează soluţii.

Soluţia 6 – din nou o abordare algebrică.

$\dfrac{a+1}{b} \in \mathbb{N}^*$şi $\dfrac{b+2}{a} \in \mathbb{N}^*$ implică faptul că există $m, n \in \mathbb{N}*$ astfel încât $a+1 = mb$ şi $b+2 = na$, sistem din care rezultă fie relaţia $a = \dfrac{2m+1}{mn-1}$ (1), fie relaţia $b = \dfrac{n+2}{mn-1}$ (1')

Observăm că pentru cazul $m = n = 1$ rezultă $a+1 = b$ şi $b+2 = a$, ceea ce conduce la $b+3 = b$, deci cazul nu conduce la soluţie. Astfel (1) şi (1') vor fi admise pentru orice altă pereche de numere naturale nenule. În concluzie, $mn > 1$, deci $mn - 1 > 0$.

Cum $a \geqslant 1$, din (1) rezultă $m(n-2) \leqslant 2$ (**), ceea ce implică următoarea abordare pe cazuri:

Cazul 1: $n = 1$, ceea ce implică $b + 2 = a$, deci corespunzător cazului (2.1) din soluţia 1, generând aceeaşi abordare prezentată anterior şi aceleaşi soluţii: $a = 3$, $b = 1$, respectiv $a = 5$, $b = 3$

Cazul 2: $n = 2$, ceea ce implică $a = \dfrac{2m+1}{2m-1} \in \mathbb{N}*$, de unde rezultă că $2m - 1 \mid 2$, convenind doar cazul $m = 1$, conducând la soluţia $a = 3$, $b = 1$.

Cazul 3: $n = 3$, ceea ce implică $m \leqslant 2$; pentru $m = 1$ se obţine $a = \dfrac{3}{2} \notin \mathbb{N}^*$; pentru $m = 2$ se obţine soluţia $a = 1$, $b = 1$.

Cazul 4: $n = 4$, ceea ce implică $m \leqslant 1$, deci pentru $m = 1$ se obţine soluţia $a = 1$, $b = 2$.

Pentru $n \geqslant 5$ rezultă $m(n-2) \geqslant 3$, deci nu mai există perechi de valori naturale nenule care să verifice condiţia (**). În concluzie, soluţiile identificate sunt singurele care îndeplinesc ipotezele problemei.

Observaţie. O abordare prin analogie poate porni de la relaţia $(1')$.

Problema ne duce cu gândul la o posibilă generalizare:

Demonstraţi că, oricare ar fi m şi n numere naturale nenule şi diferite de 1, există numerele naturale a şi b, nenule şi diferite de 1, pentru care $\dfrac{a+m}{b}$ *şi* $\dfrac{b+n}{a}$ *sunt simultan numere naturale.*

Soluţie. $\dfrac{a+m}{b} \in \mathbb{N}^*$şi $\dfrac{b+n}{a} \in \mathbb{N}^*$ implică faptul că există $p, q \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $a + m = pb$ şi $b + n = qa$, sistem din care rezultă relaţiile $a = \dfrac{np+m}{pq-1}$ şi $b = \dfrac{mq+n}{pq-1}$.

Este de ajuns să impunem $pq - 1 = 1$, adică $pq = 2$, ceea ce implică următoarele cazuri:

Cazul 1: dacă $p = 1, q = 2$ atunci $a = n + m$ şi $b = 2m + n$.

Cazul 2: dacă $p = 2, q = 1$ atunci $a = 2n + m$ şi $b = m + n$.

Observăm că nu convin cazurile $(m, n) \in \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}$.

Totuşi, ca o discuţie suplimentară avem, extinzând domeniul de admisibilitate pentru a şi b la mulţimea numerelor naturale nenule :

• $m = 0$, $n = 0$ implică $\dfrac{a}{b} \geqslant 1, \dfrac{b}{a} \geqslant 1$, deci $a \leqslant b \leqslant a$, ceea ce implică $a = b \in \mathbb{N}^*$, adică mulţimea soluţiilor este formată din perechile (a, a), oricare ar fi $a \in \mathbb{N}^*$.

• $m = 1$, $n = 0$ implică $\dfrac{a+1}{b} \geqslant 1, \dfrac{b}{a} \geqslant 1$, deci $a \leqslant b \leqslant a + 1$, ceea ce implică fie $a = b \in \mathbb{N}^*$, de unde în mod necesar $\dfrac{a+1}{a} \in \mathbb{N}*$, deci $a = b = 1$ ar fi singura soluţie, fie $b = a + 1 \in \mathbb{N}^*$, ceea ce conduce la $\dfrac{a+1}{a} \in \mathbb{N}*$, deci $a = 1, b = 2$.

• $m = 0$, $n = 1$ este analog cazului anterior;

• $m = 1$, $n = 1$ implică $\dfrac{a+1}{b} \geqslant 1, \dfrac{b+1}{a} \geqslant 1$, deci $a-1 \leqslant b \leqslant a+1$, ceea ce implică fie $a = b \in \mathbb{N}^*$, de unde în mod necesar $\dfrac{a+1}{a} \in \mathbb{N}^*$, deci $a = b = 1$ ar fi singura soluţie, fie $b = a + 1 \in \mathbb{N}^*$, ceea ce conduce la $\dfrac{a+2}{a} \in \mathbb{N}^*$, deci $a = 1, b = 2$ sau $a = 2, b = 3$, fie $b = a - 1 \in \mathbb{N}^*$, ceea ce conduce la $\dfrac{a+1}{a-1} \in \mathbb{N}^*$, deci $a = 2, b = 1$ sau $a = 3, b = 2$.

O altă observaţie permite evidenţierea cazului în care m şi n au aceeaşi paritate, caz în care se poate face alegerea $a = n + 2$ şi $b = 2$, obţinând $\dfrac{m+n+2}{2} \in \mathbb{N}^*$ (numărătorul fiind un număr par) şi $\dfrac{n+2}{n+2} = 1 \in \mathbb{N}^*$. În cazul când m şi n au parităţi diferite, abordarea nu mai este evidentă.