GAZETA MATEMATICĂ

SERIA B

PUBLICAŢIE LUNARĂ PENTRU TINERET

Fondată în anul 1895

Anul CXXI nr. 10 **octombrie 2016**

ARTICOLE ŞI NOTE MATEMATICE

ASUPRA UNEI CONFIGURAŢII PRIVIND BISECTOARELE UNUI TRIUNGHI

Ionuţ Onişor[1)]

Abstract. This article presents some common features of a problem from the Balkan Mathematical Olympiad 2015 and a problem from Tuymaada International Olympiad 2015.

Keywords: internal and external bisectors.

MSC: 51M04

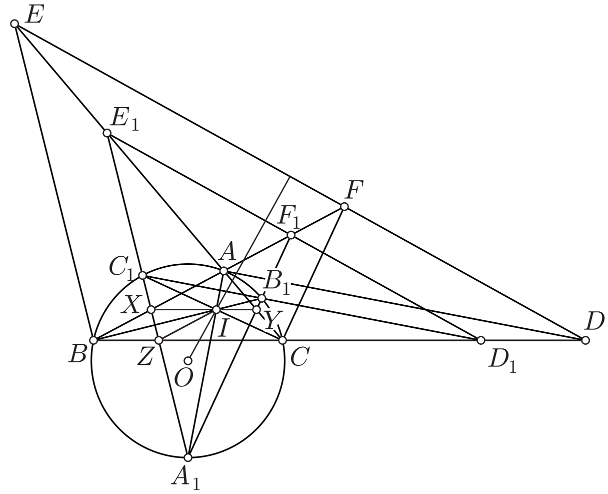
Vom discuta aici, plecând de la o anumită configuraţie, câteva probleme date la Olimpiada Internaţională Tuymaada din Iakuţia şi la Olimpiada Balcanică, ambele din 2015.

Teoremă. *Fie ABC un triunghi scalen şi D, E, F picioarele bisectoarelor exterioare ale unghiurilor A, B, C. Fie A_1, B_1, C_1 mijloacele arcelor mici BC, CA, AB ale cercului circumscris şi D_1, E_1, F_1 punctele de intersecţie ale dreptelor BC şi B_1C_1, CA şi C_1A_1, AB şi A_1B_1. Atunci*:

(1) *punctele D, E, F, respectiv punctele D_1, E_1, F_1 sunt coliniare*;
(2) *dreptele DEF şi $D_1E_1F_1$ sunt paralele*;
(3) *dreapta OI (unde O şi I sunt centrele cercurilor circumscris, respectiv înscris) este perpendiculară pe dreptele DEF şi $D_1E_1F_1$.*

Demonstraţie. (i) Coliniaritatea punctelor D, E, F rezultă imediat din teorema lui *Menelaus* (întrucât $DC/DB = AC/AB$ şi analoagele), iar coliniaritatea punctelor D_1, E_1, F_1 rezultă din teorema lui *Desargues* (întrucât dreptele AA_1, BB_1, CC_1 sunt concurente).

[1)]Profesor, Colegiul Naţional de Informatică „Tudor Vianu“, Bucureşti



(ii) Observăm întâi că dreptele B_1C_1, C_1A_1 şi A_1B_1 sunt mediatoarele segmentelor AI, BI şi CI (din $A_1B = A_1I$ etc.) şi, în particular, sunt paralele cu bisectoarele exterioare AD, BF şi CE. Astfel, cu notaţiile din figură, $XB = XI$, $ZB = ZI$; cum $\mathrm{m}(\sphericalangle BXZ) = \frac{1}{2}\mathrm{m}(\overset{\frown}{BA_1}) + \frac{1}{2}\mathrm{m}(\overset{\frown}{AC_1}) = \frac{1}{2}\mathrm{m}(\overset{\frown}{CA_1}) + \frac{1}{2}\mathrm{m}(\overset{\frown}{BC_1}) = \mathrm{m}(\sphericalangle BZX)$ avem şi $BX = BZ$. Rezultă că patrulaterul $BXIZ$ este romb şi, deci, $XI \parallel BC$, adică punctele în care se taie laturile triunghiurilor ABC şi $A_1B_1C_1$ determină trei segmente concurente în I şi paralele cu laturile triunghiului ABC. Dar atunci avem că

$$AE : AE_1 = AB : AX = AC : AY = AF : AF_1$$

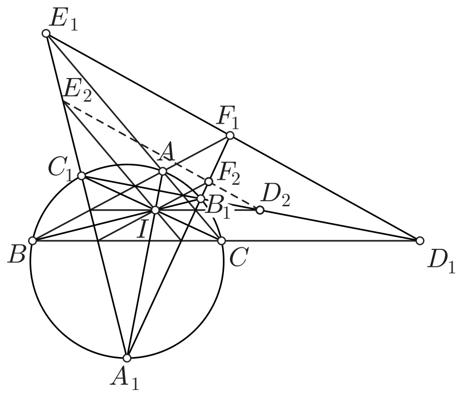
şi, prin urmare,

$$EF \parallel E_1F_1, \text{ i.e. } DEF \parallel D_1E_1F_1.$$

(Cu acest argument, din coliniaritatea punctelor D, E, F rezultă coliniaritatea punctelor D_1, E_1, F_1 şi reciproc.)

d(iii) Din construcţia punctelor D_1, E_1, F_1 se vede uşor că acestea se găsesc pe polara punctului I faţă de cercul circumscris (şi, deci, sunt, încă o dată, coliniare), i.e. dreapta $D_1E_1F_1$ este chiar polara lui I; prin urmare, avem $OI \perp D_1E_1F_1$ (şi $OI \perp DEF$).

Problema 1 (Balcaniada 2015). *Fie ABC un triunghi scalen şi I centrul cercului său înscris; fie A_1, B_1, C_1 punctele în care bisectoarele AI, BI, CI intersectează a doua oară cercul circumscris triunghiului ABC; în sfârşit, fie D_2, E_2, F_2 punctele în care paralelele prin I la laturile BC, CA, AB intersectează, respectiv, dreptele B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1. Atunci punctele D_2, E_2, F_2 sunt coliniare.*



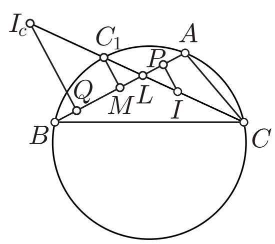
Soluţia 1. Fie, ca şi mai înainte, D_1, E_1, F_1 punctele în care dreptele B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 taie, respectiv, dreptele BC, CA, AB. Atunci, cum ştim deja, punctele D_1, E_1, F_1 sunt coliniare.

Pe de altă parte, din egalităţile $C_1D_1 : C_1D_2 = C_1C : C_1I = C_1E_1 : C_1E_2$ rezultă că $E_1D_1 \parallel E_2D_2$; cum, analog, avem şi $F_1D_1 \parallel F_2D_2$, din coliniaritatea punctelor D_1, E_1, F_1 obţinem şi coliniaritatea punctelor D_2, E_2, F_2, q.e.d.

Există şi o soluţie – următoarea – mai directă şi mai simplă. Dar cine poate miza pe o asemenea soluţie în timpul concursului? Căci se ştie că la ideile simple se ajunge după multă muncă (şi/sau prin talent). Şi, în fond, noi aici căutăm configuraţii care să ne ajute atunci când nu suntem geniali.

Soluţia 2 (cf. [2]). Din egalităţile $\sphericalangle D_2IB_1 = \sphericalangle CBB_1 = \sphericalangle IC_1B_1$ rezultă că dreapta D_2I este tangentă cercului IB_1C_1 şi, deci, $D_2I^2 = D_2B_1 \cdot D_2C_1$, de unde obţinem că D_2 se găseşte pe axa radicală a cercului ABC şi a punctului I. Analog, şi punctele E_2 şi F_2 se găsesc pe aceeaşi axă radicală şi problema este rezolvată.

Lemă / Problema 2 (*D. Shiryaev*, Tuymaada 2015). *Fie ABC un triunghi şi I centrul cercului înscris; fie L şi C_1 punctele în care bisectoarea CI intersectează latura AB şi cercul circumscris. Atunci, dacă $IL = LC_1$, avem $CI = IC_1$.*



Soluţia 1 ([1]). Fie I_c centrul cercului exînscris corespunzător vârfului C şi P, Q, M proiecţiile punctelor I, I_c, C_1 pe latura AB. Atunci M este mijlocul segmentului PQ (întrucât este mijlocul laturii AB, iar P şi Q sunt puncte izotomice pe latura AB, fiind punctele de tangenţă ale acesteia cu cercurile înscris şi exînscris) şi, prin urmare, C_1 este mijlocul segmentului II_c.

Pe de altă parte, punctele I şi I_c sunt conjugate armonic faţă de segmentul CL şi, deci,

$$\frac{IC}{IL} = \frac{I_cC}{I_cL} \text{ i.e. } \frac{IC}{IC_1/2} = \frac{IC + 2IC_1}{3IC_1/2},$$

de unde rezultă că $IC = IC_1$, q.e.d.

Şi acum încă o soluţie simplă.

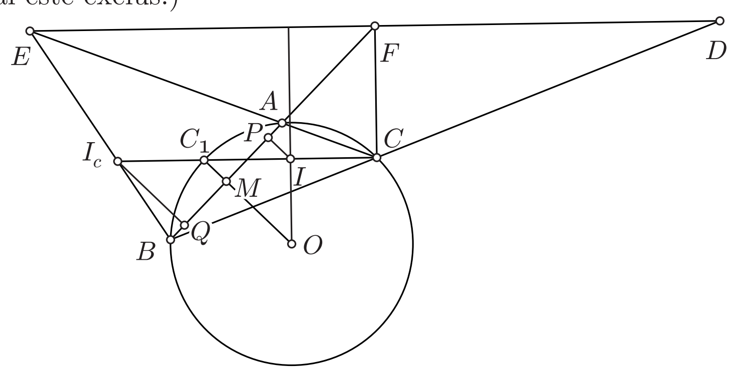
Soluţia 2. Din asemănarea triunghiurilor AC_1L şi CBL (şi ţinând cont de egalitatea $C_1A = C_1I$ şi teorema bisectoarei) rezultă că

$$IC : IL = BC : BL = C_1A : C_1L = 2,$$

de unde concluzia este imediată.

Problema 3 (*D. Shiryaev*, Tuymaada 2015). *Fie ABC un triunghi în care $OM = R - r$, unde O este centrul cercului circumscris, M este mijlocul laturii AB, iar R şi r sunt razele cercurilor circumscris, respectiv înscris. Fie D şi F picioarele bisectoarelor exterioare ale unghiurilor A şi C. Să se determine toate valorile posibile pentru unghiul $\sphericalangle CFD$.*

Pentru precizarea figurii, să observăm înainte de toate că unghiul C este ascuţit: din inegalitatea lui *Euler*, $R \geqslant 2r$, rezultă că $OM > MC_1$ (unde C_1 este mijlocul arcului mic $\overset{\frown}{AB}$) şi, deci, unghiul C este mai mic chiar de $60°$. (De notat că inegalitatea precedentă este strictă întrucât cazul triunghiului echilateral este exclus.)



Soluţia 1 (*a doua soluţie oficială*, cf. [1]). Fie I centrul cercului înscris şi P proiecţia sa pe latura AB. Atunci, întrucât $IP = r = MC_1$ şi $IP \perp AB \perp MC_1$, avem că latura AB trece prin mijlocul segmentului IC_1, de unde rezultă (cf. lema) că I este mijlocul segmentului CC_1 şi, deci, $OI \perp CC_1$.

Pe de altă parte, avem că $OI \perp DF$ (cf. teorema) şi $CF \perp CC_1$ (fiind bisectoarele unghiului C), de unde obţinem că $CF \perp DF$, i.e. $\sphericalangle CFD = 90°$.

Următoarea soluţie, calculatorie, foloseşte doar coliniaritatea punctelor D, E, F (nu şi lema).

Soluţia 2 (*prima soluţie oficială*, cf. [1]). Cu notaţiile uzuale, şi fără a restânge generalitatea[1], vom presupune că $a > c > b$; celelalte notaţii sunt cele de până acum.

Cum M este mijlocul segmentului PQ (P şi Q fiind izotomice pe latura AB), bisectoarea CC_1 trece prin mijlocul segmentului PM şi $IP = MC_1 = r$, rezultă că $I_cQ = 3r$ şi, deci, $p = 3(p - c)$, i.e. $a + b = 2c$.

Pe de altă parte, avem că

$$DC : CB = b : c \quad \text{i.e} \quad DC = \frac{ab}{c-b}$$

$$EA : EC = c : a \quad \text{i.e} \quad EA = \frac{bc}{a-c}$$

de unde

$$EC = b + \frac{bc}{a-c} = \frac{ab}{a-c} = \frac{ab}{c-b} = DC.$$

Prin urmare, triunghiul CDE este isoscel (în C) şi cum CF este bisectoare în acest triunghi, rezultă că $CF \perp DE$, i.e. $\sphericalangle CFD = 90^\circ$.

Bibliografie

[1] *International Olympiad Tuymaada – 2015 (mathematics)*, Yakutsk 2015

[2] `http://www.artofproblemsolving.com`

[1] Într-adevăr, completarea perechii de puncte D, F la tripletul D, E, F face problema cu adevărat simetrică în A şi B.