PROBLEME PROPUSE

PROBLEME PENTRU EXAMENE NAŢIONALE[1)]

Clasa a IX-a

14. Fie a, b, c, d numere reale cu suma nulă. Să se arate că

$$\left(a^3 + b^3 + c^3 + d^3\right)^2 = 9(bc - ad)(ca - bd)(ab - cd).$$

15. Să se rezolve ecuaţia $x^2 - [x] = 12$.

16. Să se determine perechile (x, y) de numere reale care verifică

$$x^3 - y^3 = 3(x - y) \text{ şi } x^3 + y^3 = x + y.$$

17. Să se afle locul geometric al punctelor M din plan cu proprietatea că $MA^2 - MB^2$ este constantă, unde A şi B sunt puncte fixe.

18. Să se calculeze $\sin(x + y)$ ştiind că

$$\sin x + \cos y = \frac{1}{2} \text{ şi } \cos x + \sin y = \frac{1}{3}.$$

19. Fie ABC un triunghi cu $a^4 \geq b^4 + c^4 - b^2c^2$. Să se arate că $\mathrm{m}(\sphericalangle A) \geq 60°$.

Clasa a X-a

20. Să se reprezinte în planul complex mulţimea punctelor de afix z cu proprietatea $|z + 1| < |\mathrm{i} - z|$.

21. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia $\sqrt{1 - \sqrt{x^4 - x}} = x - 1$.

22. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia $\log_2 x + \log_5 x = 1$.

23. Să se demonstreze că $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k k!(2n - k)! = \frac{(2n + 1)!}{n + 1}$.

24. Într-un cerc de rază R se consideră două coarde perpendiculare AB şi CD. Să se arate $AC + BD > 2R$.

25. Fie punctele $A(1, 0)$ şi $B(2, 3)$. Să se determine mulţimea punctelor C cu proprietatea că aria triunghiului ABC este egală cu 4.

[1)] La problemele din această rubrică nu se primesc soluţii. (N.R.)

Clasa a XI-a

26. Considerăm sistemul de ecuaţii liniare

$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ x + y + z = 3 \\ mx + y - z = m \end{cases}, \qquad m \in \mathbb{R}.$$

a) Să se calculeze determinantul sistemului.

b) Să se arate că sistemul este compatibil, oricare ar fi $m \in \mathbb{R}$.

c) Pentru $m = -1$, să se determine o soluţie (a, b, c) a sistemului, astfel încât $a^2 + b^2 + c^2 = 5$.

27. Considerăm funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \mathrm{e}^x + 2x + 1$.

a) Să se arate că funcţia este inversabilă.

b) Să se calculeze $\left(f^{-1}\right)'(2)$.

c) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln x}{f^{-1}(x)}$.

Clasa a XII-a

28. Fie inelul $\mathbb{Z}[\mathrm{i}] = \{m + n\mathrm{i} \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$ şi fie funcţia $\varphi : \mathbb{Z}[\mathrm{i}] \to \mathbb{N}$, $\varphi(m + n\mathrm{i}) = m^2 + n^2$.

a) Să se arate că $\varphi(zz') = \varphi(z) \cdot \varphi(z')$, $\forall\, z, z' \in \mathbb{Z}[\mathrm{i}]$.

b) Să se arate că $\varphi(z) = 1 \Leftrightarrow z^4 = 1$.

c) Fie $z, z' \in \mathbb{Z}[\mathrm{i}]$, $z' \neq 0$. Să se arate că există $q, r \in \mathbb{Z}[\mathrm{i}]$ cu $z = z'q + r$ şi $\varphi(r) < \varphi(z')$.

29. Fie şirul $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin nx\mathrm{d}x$, $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Să se calculeze I_n.

b) Să se arate că şirul $(I_n)_{n\geq 1}$ este monoton.

c) Să se arate că şirul $\left(\dfrac{I_{n+1}}{I_n}\right)_{n\geq 1}$ este convergent.