O GENERALIZARE A UNEI PROBLEME DE CONCURS

Marian Haiducu[1)] şi Mircea Fianu[2)]

Abstract. This short note extends a problem from the Romanian 9th grade 2015 National Mathematical Olympiad

Keywords: conditional inequality, Cauchy-Buniakovski-Schwarz inequality

MSC : 26D15

Această notă matematică generalizează o inegalitate propusă la Olimpiada Naţională de Matematică 2015. Enunţul problemei[3)] este următorul: *Fie $a, b, c, d \geq 0$, numere reale, astfel încât $a + b + c + d = 1$. Arătaţi că*

$$\sqrt{a + \frac{(b-c)^2}{6} + \frac{(c-d)^2}{6} + \frac{(d-b)^2}{6}} + \sqrt{b} + \sqrt{c} + \sqrt{d} \leq 2.$$

Considerând mai multe variabile, putem formula următoarea propoziţie.

Generalizare. *Fie $a_1, a_2, \ldots, a_n \geq 0$, numere reale, $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$, astfel încât $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 1$. Atunci*

$$\sqrt{a_1 + \frac{1}{2(n-1)} \sum_{2 \leq i < j \leq n} (a_i - a_j)^2} + \sum_{i=2}^{n} \sqrt{a_i} \leq \sqrt{n}.$$

Egalitatea are loc dacă şi numai dacă $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = \dfrac{1}{n}$.

Demonstraţie. Arătăm mai întâi că

$$(a_i - a_j)^2 \leq 2\left(\sqrt{a_i} - \sqrt{a_j}\right)^2, \tag{1}$$

pentru orice $2 \leq i < j \leq n$. Avem

$$\left(\sqrt{a_i} + \sqrt{a_j}\right)^2 = a_i + a_j + 2\sqrt{a_i a_j} \leq 2(a_i + a_j) \leq 2(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) = 2,$$

de unde, înmulţind cu $\left(\sqrt{a_i} - \sqrt{a_j}\right)^2 \geq 0$, obţinem

$$\left(\sqrt{a_i} + \sqrt{a_j}\right)^2 \left(\sqrt{a_i} - \sqrt{a_j}\right)^2 \leq 2\left(\sqrt{a_i} - \sqrt{a_j}\right)^2,$$

adică (1).

Folosind acum (1) obţinem

$$a_1 + \frac{1}{2(n-1)} \sum_{2 \leq i < j \leq n} (a_i - a_j)^2 \leq a_1 + \frac{1}{n-1} \sum_{2 \leq i < j \leq n} (\sqrt{a_i} - \sqrt{a_j})^2 =$$

$$= 1 - a_2 - a_3 - \ldots - a_n + \frac{n-2}{n-1}(a_2 + a_3 + \ldots + a_n) - \frac{2}{n-1} \sum_{2 \leq i < j \leq n} \sqrt{a_i a_j} =$$

[1)] Profesor, Şcoala Gimnazială „Mihai Eminescu" Piteşti

[2)] Profesor, Şcoala Gimnazială „Tudor Arghezi" Bucureşti

[3)] Autor *Costel Anghel*, Negreni, Olt.

$$= 1 - \frac{1}{n-1}(a_2 + a_3 + \ldots + a_n) - \frac{2}{n-1}(\sqrt{a_2a_3} + \sqrt{a_2a_4} + \ldots + \sqrt{a_{n-1}a_n}) =$$
$$= 1 - \frac{1}{n-1}(\sqrt{a_2} + \sqrt{a_3} + \ldots + \sqrt{a_n})^2.$$

Prin urmare, pentru a proba inegalitatea este suficient să arătăm că

$$S + \sqrt{1 - \frac{S^2}{n-1}} \leq \sqrt{n}, \tag{2}$$

unde $S = \sqrt{a_2} + \sqrt{a_3} + \ldots + \sqrt{a_n}$.

Pentru a demonstra (2) observăm mai întâi că $S \leq \sqrt{n}$. Într-adevăr, folosind inegalitatea *Cauchy-Buniakovski-Schwarz* avem

$$(1 \cdot \sqrt{a_1} + 1 \cdot \sqrt{a_2} + \ldots + 1 \cdot \sqrt{a_n}) \leq (1^2 + 1^2 + \ldots + 1^2)\,(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)\,,$$

care duce la $\left(\sqrt{a_1} + S\right)^2 \leq n$, sau $\sqrt{a_1} + S \leq \sqrt{n}$, de unde $S \leq \sqrt{n}$.

În baza observaţiei de mai sus, (2) este echivalentă succesiv cu

$$\sqrt{1 - \frac{S^2}{n-1}} \leq \sqrt{n} - S,$$
$$1 - \frac{S^2}{n-1} \leq n - 2\sqrt{n}S + S^2,$$
$$(n-1) - S^2 \leq n(n-1) - 2\sqrt{n}(n-1)S + (n-1)S^2,$$
$$0 \leq n(n-1) - (n-1) - 2\sqrt{n}(n-1)S + (n-1)S^2 + S^2,$$
$$0 \leq (n-1)^2 - 2\sqrt{n}(n-1)S + nS^2,$$
$$0 \leq \left[(n-1) - \sqrt{n}S\right]^2,$$

ceea ce este evident.

Pentru egalitate este necesar să avem egalitate în (1) şi în ultima inegalitate, adică $a_2 = a_3 = \ldots = a_n = \frac{1}{n}$, de unde reiese şi $a_1 = \frac{1}{n}$. Astfel demonstraţia este încheiată.

Bibliografie

[1] Gazeta Matematică, Supliment, *A 66-a Olimpiadă Naţională de Matematică, Bucureşti, 6-10 aprilie 2015.*