ASUPRA UNOR INEGALITĂŢI INTEGRALE

MARTIN BOTTESCH[1)]

Abstract. This note refers to the solution of problem 26954, pinpointing a mistake and bringing some extra light on its subject.

Keywords: Integral inequality, Cauchy-Schwarz integral inequality
MSC : 26D10

În G.M.-B nr. 6-7-8/2014 a fost publicată problema **26954**, iar rezolvarea ei a apărut în a G.M.-B nr. 2/2015, textul problemei fiind uşor modificat astfel:

Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *o funcţie derivabilă, cu derivata continuă şi cu proprietatea* $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = f\left(\frac{a+b}{2}\right) = 0$. *Să se arate că*

$$\int\limits_a^b \left(f'(x)\right)^2 \mathrm{d}x - (f(a) + f(b))^2 \geq \frac{8}{(b-a)^2} \int\limits_a^b (f(x))^2 \mathrm{d}x.$$

În cele cu urmează vom arăta (Proprietatea 3) că afirmaţia nu este adevărată nici în forma iniţială (o inegalitate mai tare), nici în forma modificată. Considerăm totuşi de interes evaluarea integralei $\int\limits_a^b \left(f'(x)\right)^2 \mathrm{d}x$, fapt pentru care demonstrăm două inegalităţi (Proprietăţile 1 şi 2).

Proprietatea 1. *Dacă* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *este o funcţie derivabilă, cu derivată continuă, astfel încât* $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = 0$, *atunci*

$$\int\limits_a^b \left(f'(x)\right)^2 \mathrm{d}x \geq \frac{3}{b-a} (f(a) + f(b))^2. \tag{1}$$

Demonstraţie. Avem

$$\int\limits_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right) f'(x)\mathrm{d}x = \left(x - \frac{a+b}{2}\right) f(x)\Big|_a^b - \int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{b-a}{2} f(b) - \frac{a-b}{2} f(a) = \frac{b-a}{2} (f(b) + f(a)).$$

[1)]Profesor, Colegiul Naţional ,,Samuel von Brukenthal", Sibiu.

Folosind inegalitatea *Cauchy-Schwarz*, obţinem

$$\left(\int_a^b \left(x-\frac{a+b}{2}\right) f'(x)\mathrm{d}x\right)^2 \le \left(\int_a^b \left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2 \mathrm{d}x\right)\left(\int_a^b \left(f'(x)\right)^2 \mathrm{d}x\right) =$$

$$= \frac{(b-a)^3}{12}\left(\int_a^b \left(f'(x)\right)^2 \mathrm{d}x\right).$$

Prin urmare

$$\left(\frac{b-a}{2}\left(f(b)+f(a)\right)\right)^2 \le \frac{(b-a)^3}{12}\left(\int_a^b \left(f'(x)\right)^2 \mathrm{d}x\right),$$

de unde

$$\int_a^b \left(f'(x)\right)^2 \mathrm{d}x \ge \frac{12}{(b-a)^3}\left(\frac{b-a}{2}\left(f(b)+f(a)\right)\right)^2 = \frac{3}{b-a}\left(f(b)+f(a)\right)^2,$$

adică inegalitatea (1).

Observaţie. În (1) avem egalitate dacă şi numai dacă inegalitatea *Cauchy-Schwarz* folosită se realizează cu semnul egal, adică avem o relaţie de forma $f'(x) = \lambda\left(x-\frac{a+b}{2}\right)$, cu $\lambda \in \mathbb{R}$. Ţinând seama şi de $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = 0$, se obţine $f(x) = \lambda\left((x-a)(x-b)+\frac{1}{6}(b-a)^2\right)$, cu $\lambda \in \mathbb{R}$.

Următoarea inegalitate apare într-o formă particulară în [1], p. 174.

Proprietatea 2. *Dacă* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *este o funcţie derivabilă, cu derivata continuă şi* $f(a) = 0$, *atunci*

$$\int_a^b \left(f'(x)\right)^2 \mathrm{d}x \ge \frac{\pi^2}{4(b-a)^2}\int_a^b \left(f(x)\right)^2 \mathrm{d}x. \tag{2}$$

Demonstraţie. Adaptând demonstraţia din [1] la cazul general, considerăm $h \in (0,\ b-a)$ oarecare şi avem

$$\int_{a+h}^b \left(f'(x) - \frac{\pi}{2(b-a)} f(x)\,\mathrm{ctg}\frac{(x-a)\pi}{2(b-a)}\right)^2 \mathrm{d}x =$$

$$= \int_{a+h}^b \left((f'(x))^2 - \frac{\pi f'(x) f(x)}{b-a}\,\mathrm{ctg}\frac{(x-a)\pi}{2(b-a)} + \frac{\pi^2 f^2(x)}{4(b-a)^2}\,\mathrm{ctg}^2\frac{(x-a)\pi}{2(b-a)}\right)\mathrm{d}x =$$

$$= \int\limits_{a+h}^{b} \left(f'(x)\right)^2 \mathrm{d}x - \frac{\pi}{2(b-a)} \left(f(x)\right)^2 \operatorname{ctg}\frac{(x-a)\pi}{2(b-a)}\Bigg|_{a+h}^{b} -$$

$$-\frac{\pi^2}{4(b-a)^2}\int_{a+h}^{b}\frac{(f(x))^2}{\sin^2\dfrac{(x-a)\pi}{2(b-a)}}\mathrm{d}x + \frac{\pi^2}{4(b-a)^2}\int_{a+h}^{b} f^2(x)\operatorname{ctg}^2\frac{(x-a)\pi}{2(b-a)}\mathrm{d}x =$$

$$= \int_{a+h}^{b}(f'(x))^2\mathrm{d}x + \frac{\pi(f(a+h))^2}{2(b-a)}\operatorname{ctg}\frac{h\pi}{2(b-a)} - \frac{\pi^2}{4(b-a)^2}\int_{a+h}^{b}(f(x))^2\mathrm{d}x.$$

Prin urmare,

$$\int\limits_{a+h}^{b}(f'(x))^2\mathrm{d}x + \frac{\pi(f(a+h))^2}{2(b-a)}\operatorname{ctg}\frac{h\pi}{2(b-a)} - \frac{\pi^2}{4(b-a)^2}\int\limits_{a+h}^{b}(f(x))^2\mathrm{d}x \geq 0.$$

În această inegalitate facem pe h să tindă la 0. Avem

$$\lim_{h\to 0}\int\limits_{a+h}^{b}\left(f'(x)\right)^2\mathrm{d}x = \int\limits_{a}^{b}\left(f'(x)\right)^2\mathrm{d}x$$

şi

$$\lim_{h\to 0}\int\limits_{a+h}^{b}(f(x))^2\,\mathrm{d}x = \int\limits_{a}^{b}(f(x))^2\,\mathrm{d}x.$$

Pe de altă parte,

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{\pi}{2(b-a)}\left(f(a+h)\right)^2 \operatorname{ctg}\frac{h\pi}{2(b-a)}\right) =$$

$$= \lim_{h\to 0}\left((f(a+h))\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\frac{\dfrac{h\pi}{2(b-a)}}{\sin\dfrac{h\pi}{2(b-a)}}\cos\frac{h\pi}{2(b-a)}\right) = 0\cdot f'(a)\cdot 1\cdot 1 = 0.$$

Astfel rezultă inegalitatea (2).

Observaţie. Se constată că pentru $f(x) = \lambda\sin\dfrac{(x-a)\pi}{2(b-a)}$, unde $\lambda\in\mathbb{R}$, inegalitatea (2) se realizează cu semnul egal. Se arată uşor că acestea sunt singurele funcţii pentru care în (2) avem egalitate.

Revenind la problema 26954 din GM, vom demonstra:

Proprietatea 3. *Pentru orice $A > 0$ se poate găsi un interval $[a,b]$ şi o funcţie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ derivabilă, cu derivata continuă, astfel încât*

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x = f\left(\frac{a+b}{2}\right) = 0$$

şi

$$\int_a^b \left(f'(x)\right)^2 \mathrm{d}x - A\left(f(a)+f(b)\right)^2 < 0. \tag{3}$$

Demonstraţie. Fie A un număr pozitiv dat. Vom construi un şir de funcţii $(f_n)_{n\geq 1}$, fiecare f_n fiind definită pe câte un interval $[a_n, b_n]$ şi având proprietăţile din enunţ, astfel încât $A\left(f_n(a_n)+f_n(b_n)\right)^2$ să aibă o valoare pozitivă constantă (independentă de n) şi $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{a_n}^{b_n}\left(f_n'(x)\right)^2\mathrm{d}x = 0$. Atunci relaţia (3) are loc pentru n suficient de mare, cu f_n în loc de f şi $[a_n, b_n]$ în loc de $[a,b]$.

Pentru fiecare $n\in\mathbb{N}^*$ fie

$$f_n:[0,2n\pi]\to\mathbb{R},\quad f_n(x)=\begin{cases}\sin\dfrac{x}{n} & , x\in[0,n\pi]\\ p(x-n\pi)(x-q), & x\in(n\pi,2n\pi]\end{cases},$$

unde p şi q sunt parametri reali. Pornind de la proprietăţile pe care trebuie să le aibă f (în cazul nostru f_n), vom determina pe p şi q astfel încât

$$\lim_{x\searrow n\pi} f_n'(x) = \lim_{x\nearrow n\pi} f_n'(x) \quad \text{şi} \quad \int_0^{2n\pi} f_n(x)\mathrm{d}x = 0. \tag{4}$$

Cum $\lim\limits_{x\nearrow n\pi} f_n'(x) = \lim\limits_{x\nearrow n\pi}\dfrac{1}{n}\cos\dfrac{x}{n} = -\dfrac{1}{n}$ şi

$$\int_0^{n\pi} f_n(x)\mathrm{d}x = \int_0^{n\pi}\sin\frac{x}{n}\mathrm{d}x = -n\cos\frac{x}{n}\bigg|_0^{n\pi} = 2n,$$

condiţiile (4) devin

$$\lim_{x\searrow n\pi} f_n'(x) = -\frac{1}{n}, \tag{5}$$

respectiv

$$\int_{n\pi}^{2n\pi} f_n(x)\mathrm{d}x = -2n. \tag{6}$$

Pentru $x\in(n\pi,2n\pi]$ avem $f(x)=p(x^2-n\pi x-qx+nq\pi)$, deci $f_n'(x) = p(2x-n\pi-q)$. Din (5) rezultă

$$p(n\pi-q) = -\frac{1}{n}. \tag{7}$$

Pentru a ţine seama şi de (6), calculăm integrala $\displaystyle\int_{n\pi}^{2n\pi} f_n(x)\mathrm{d}x$.

$$\int_{n\pi}^{2n\pi} f_n(x)\mathrm{d}x = \int_{n\pi}^{2n\pi} p(x^2-n\pi x-qx+nq\pi)\mathrm{d}x = p\left[\frac{x^3}{3} - n\pi\frac{x^2}{2} - q\frac{x^2}{2} + nq\pi x\right]\Bigg|_{n\pi}^{2n\pi}$$

$$= p\left(\frac{7n^3\pi^3}{3} - \frac{3n^3\pi^3}{2} - \frac{3n^2\pi^2 q}{2} + n^2\pi^2 q\right) =$$

$$= p\left(\frac{5n^3\pi^3}{6} - \frac{n^2\pi^2 q}{2}\right) = \frac{pn^2\pi^2}{2}\left(\frac{5n\pi}{3} - q\right).$$

Acum (6) devine $\dfrac{pn^2\pi^2}{2}\left(\dfrac{5n\pi}{3} - q\right) = -2n$, respectiv

$$p\left(\frac{5n\pi}{3} - q\right) = -\frac{4}{n\pi^2}. \tag{8}$$

Rezolvând sistemul format din (7) şi (8) în funcţie de p şi q, obţinem $p = \dfrac{3\left(\pi^2-4\right)}{2n^2\pi^3}$ şi $q = \dfrac{5n\pi^3 - 12n\pi}{3\left(\pi^2-4\right)}$. Prin urmare, pentru $x \in (n\pi, 2n\pi]$,

$$f_n(x) = \frac{3\left(\pi^2-4\right)}{2n^2\pi^3}\left(x^2 - \left(\frac{5n\pi^3 - 12n\pi}{3\left(\pi^2-4\right)} + n\pi\right)x + \frac{5n^2\pi^4 - 12n^2\pi^2}{3\left(\pi^2-4\right)}\right),$$

deci

$$f_n(x) = \begin{cases} \sin\dfrac{x}{n} & , x \in [0, n\pi] \\ \dfrac{3(\pi^2-4)x^2 - (8n\pi^3 - 24n\pi)x + 5n^2\pi^4 - 12n^2\pi^2}{2n^2\pi^3} & , x \in (n\pi, 2n\pi]. \end{cases}$$

Din $\lim\limits_{x\searrow n\pi} f_n'(x) = \lim\limits_{x\nearrow n\pi} f_n'(x)$ şi din continuitatea lui f_n în $n\pi$ rezultă (potrivit unei consecinţe a teoremei lui *Lagrange*) că $f_n'(n\pi) = -\dfrac{1}{n}$. Astfel f_n este derivabilă şi are derivata continuă.

Condiţia $f_n\left(\dfrac{a+b}{2}\right) = f_n(n\pi) = 0$ este satisfăcută, întrucât funcţia f_n a fost astfel construită. Şi condiţia $\displaystyle\int_0^{2n\pi} f_n(x)\mathrm{d}x = 0$ este satisfăcută, deoarece p şi q au fost astfel determinaţi încât $\displaystyle\int_{n\pi}^{2n\pi} f_n(x)\mathrm{d}x = -2n = -\int_0^{n\pi} f_n(x)\mathrm{d}x$.

Pentru $n \in \mathbb{N}^*$ oarecare avem

$$\int_0^{2n\pi} \left(f_n'(x)\right)^2 \mathrm{d}x = \int_0^{n\pi} \left(f_n'(x)\right)^2 \mathrm{d}x + \int_{n\pi}^{2n\pi} \left(f_n'(x)\right)^2 \mathrm{d}x.$$

Însă $\displaystyle\int_0^{n\pi} \left(f_n'(x)\right)^2 \mathrm{d}x = \int_0^{n\pi} \left(\frac{1}{n}\cos\frac{x}{n}\right)^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{n^2}\int_0^{n\pi} \cos^2\frac{x}{n}\mathrm{d}x < \frac{n\pi}{n^2}$, deci pentru toţi $n \in \mathbb{N}^*$ avem $0 \leq \displaystyle\int_0^{n\pi} \left(f_n'(x)\right)^2 \mathrm{d}x < \frac{\pi}{n}$, de unde

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{n\pi} \left(f_n'(x)\right)^2 \mathrm{d}x = 0.$$

Prin calcul se obţine $\displaystyle\int_{n\pi}^{2n\pi} \left(f_n'(x)\right)^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{n\pi^3}\left(\pi^4 - 12\pi^2 + 48\right)$. Şi această expresie tinde la 0 când n tinde la infinit, deci $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^{2n\pi} \left(f_n'(x)\right)^2 \mathrm{d}x = 0$.

Pe de altă parte, $f_n(0) = 0$ şi $f_n(2n\pi) = \dfrac{1}{2\pi}\left(\pi^2 - 12\right)$. Astfel

$$A\left(f_n(a) + f_n(b)\right)^2 = A\frac{1}{4\pi^2}\left(\pi^2 - 12\right)^2 > 0.$$

Rezultă că pentru n suficient de mare inegalitatea (3) are loc (cu f_n în loc de f şi $[a_n, b_n]$ în loc de $[a, b]$).

Observaţie. Particularizând $A = 1$ rezultă că afirmaţia problemei 26954 nu poate avea loc în general. Eroarea în soluţia prezentată în GM rezidă în folosirea inegalităţii

$$\int_a^b (x-c)^2 \left(f'(x)\right)^2 \mathrm{d}x \geq \left(\int_a^b (x-c)f'(x)\,\mathrm{d}x\right)^2,$$

cu $c = \dfrac{a+b}{2}$, inegalitate care poate să nu aibă loc, chiar dacă funcţia îndeplineşte condiţiile din ipoteză.

Bibliografie

[1] Dorel Duca, Emilia Copacu, Gheorghe Lobonţ: *Analiză Matematică, clasele XI-XII, pentru grupele de excelenţă*, Studia, Cluj-Napoca 2010.