PENTRU CERCURILE DE ELEVI

RELAŢII VECTORIALE ÎNTRE ELEMENTELE UNUI TRIUNGHI

MARCEL CHIRIŢĂ[1)]

În această lecţie vom stabili câteva relaţii vectoriale între elementele unui triunghi şi în final vom stabili identităţi vectoriale cu unele aplicaţii.

I. *În orice triunghi avem:*

$$\overrightarrow{m_a} \cdot \overrightarrow{i_a} = p(p-a) \tag{1}$$

$$\overrightarrow{m_a} \cdot \overrightarrow{h_a} = \frac{4S^2}{a^2} \tag{2}$$

$$\overrightarrow{i_a} \cdot \overrightarrow{h_a} = \frac{4S^2}{a^2} \tag{3}$$

$$\overrightarrow{m_a} \cdot \overrightarrow{a} = \frac{1}{2}\left(b^2+c^2\right). \tag{4}$$

În demonstraţie vom folosi următorul rezultat:

Dacă ABC este un triunghi, $M \in (BC)$ şi $\frac{MB}{MC} = k$ atunci

$$\overrightarrow{AM} = \frac{\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{AC}}{1+k}.$$

.

1) Pentru mediana m_a avem $k=1$ şi $\overrightarrow{m_a} = \frac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{2}$. Pentru bisectoarea i_a, deoarece $\frac{MB}{MC} = \frac{c}{b}$, rezultă $k = \frac{c}{b}$ şi deci $\overrightarrow{i_a} = \frac{b\overrightarrow{AB}+c\overrightarrow{AC}}{b+c}$.

Atunci obţinem pe rând

$$\begin{aligned}\overrightarrow{m_a} \cdot \overrightarrow{i_a} &= \left(\frac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{2}\right)\left(\frac{b\overrightarrow{AB}+c\overrightarrow{AC}}{b+c}\right) = \\ &= \frac{bc^2}{2(b+c)} + \frac{c^2b}{2(b+c)} + \left[\frac{c}{2(b+c)} + \frac{b}{2(b+c)}\right]\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \\ &= \frac{bc}{2} + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(b^2+c^2-a^2\right] = \\ &= \frac{1}{4}\left[(b+c)^2-a^2\right] = \frac{1}{4}(a+b+c)(b+c-a) = p(p-a).\end{aligned}$$

Analog obţinem $\overrightarrow{m_b} \cdot \overrightarrow{i_b} = p(p-b)$ şi $\overrightarrow{m_c} \cdot \overrightarrow{i_c} = p(p-c)$.

[1)] Profesor, Bucureşti.

2) Pentru înălţimea h_a avem $k = \dfrac{c\cos B}{b\cos C}$ şi

$$\overrightarrow{h_a} = \frac{b\cos C\cdot\overrightarrow{AB} + c\cos B\cdot\overrightarrow{AC}}{b\cos C + c\cos B} = \frac{b\cos C\cdot\overrightarrow{AB} + c\cos B\cdot\overrightarrow{AC}}{a}.$$

Atunci

$$\overrightarrow{m_a}\cdot\overrightarrow{h_a} = \left(\frac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{2}\right)\left(\frac{b\cos C\cdot\overrightarrow{AB} + c\cos B\cdot\overrightarrow{AC}}{a}\right) =$$

$$= \frac{bc^2\cos C}{2a} + \frac{b^2c\cos B}{2a} + \left(\frac{c\cos B + b\cos C}{2a}\right)\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} =$$

$$= \frac{bc}{2a}(c\cos C + b\cos B) + \frac{1}{4}(b^2+c^2-a^2) =$$

$$= \frac{bc}{2a}\left(c\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} + b\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}\right) + \frac{1}{4}(b^2+c^2-a^2) =$$

$$= \frac{a^2c^2+b^2c^2-c^4+a^2b^2+b^2c^2-b^4+a^2b^2+a^2c^2-a^4}{4a^2} =$$

$$= \frac{2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2-a^4-b^4-c^4}{4a^2}.$$

Deoarece

$$2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2-a^4-b^4-c^4 = (a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a) =$$

$$= 16p(p-a)(p-b)(p-c) = 16S^2$$

rezultă (2). Analog obţinem $\overrightarrow{m_b}\cdot\overrightarrow{h_b} = \dfrac{4S^2}{b^2}$ şi $\overrightarrow{m_c}\cdot\overrightarrow{h_c} = \dfrac{4S^2}{c^2}$.

3) Pentru bisectoarea i_a avem $\overrightarrow{i_a} = \dfrac{b\cdot\overrightarrow{AB} + c\cdot\overrightarrow{AC}}{b+c}$ şi pentru înălţimea h_a avem $\overrightarrow{h_a} = \dfrac{b\cos C\cdot\overrightarrow{AB} + c\cos B\cdot\overrightarrow{AC}}{a}$. Deci

$$\overrightarrow{i_a}\cdot\overrightarrow{h_a} = \frac{b\overrightarrow{AB}+c\overrightarrow{AC}}{b+c}\cdot\frac{b\cos C\cdot\overrightarrow{AB} + c\cos B\cdot\overrightarrow{AC}}{a} =$$

$$= \frac{b^2c^2\cos C}{a(b+c)} + \frac{b^2c^2\cos B}{a(b+c)} + \left(\frac{bc\cos B + bc\cos C}{a(b+c)}\right)\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} =$$

$$= \frac{bc\left(\dfrac{a^2b+bc^2-b^3+a^2c+b^2c-c^3}{2abc}\right)}{2a(b+c)}(b+c+a)(b+c-a) =$$

$$= \frac{(b+c)(a+b-c)(a+c-b)(a+b+c)(b+c-a)}{4a^2(b+c)} =$$

$$= \frac{2p\cdot 2(p-a)\cdot 2(p-b)\cdot 2(p-c)}{4a^2} = \frac{4S^2}{a^2}.$$

Analog obţinem $\overrightarrow{i_b} \cdot \overrightarrow{h_b} = \dfrac{4S^2}{b^2}$ şi $\overrightarrow{i_c} \cdot \overrightarrow{h_c} = \dfrac{4S^2}{c^2}$.

4) Avem

$$\overrightarrow{m_a} \cdot \overrightarrow{a} = am_a \cos\left(\overrightarrow{m_a}, \overrightarrow{a}\right) = am_a \frac{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + m_a^2 - b^2}{am_a} =$$

$$= \frac{1}{4}a^2 + m_a^2 - b^2 = \frac{1}{2}\left(b^2 + c^2\right).$$

Analog obţinem $\overrightarrow{m_b} \cdot \overrightarrow{b} = \dfrac{1}{2}\left(a^2 + c^2\right)$ şi $\overrightarrow{m_c} \cdot \overrightarrow{c} = \dfrac{1}{2}\left(a^2 + b^2\right)$.

II.1) Din (1) obţinem $\overrightarrow{m_a} \cdot \overrightarrow{i_a} + \overrightarrow{m_b} \cdot \overrightarrow{i_b} + \overrightarrow{m_c} \cdot \overrightarrow{i_c} = p^2$.

2) Din (2) obţinem $\overrightarrow{m_a} \cdot \overrightarrow{h_a} + \overrightarrow{m_b} \cdot \overrightarrow{h_b} + \overrightarrow{m_c} \cdot \overrightarrow{h_c} = 4\mathrm{S}^2 \left(\dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2}\right)$.

3) Din (3) obţinem $\overrightarrow{i_a} \cdot \overrightarrow{h_a} + \overrightarrow{i_b} \cdot \overrightarrow{h_b} + \overrightarrow{i_c} \cdot \overrightarrow{h_c} = 4S^2 \left(\dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2}\right)$.

4) Din (4) obţinem $\overrightarrow{m_a} \cdot \overrightarrow{a} + \overrightarrow{m_b} \cdot \overrightarrow{b} + \overrightarrow{m_c} \cdot \overrightarrow{c} = a^2 + b^2 + c^2$.

Din relaţiile demonstrate deducem următoarele inegalităţi.

5) Din II. (1) rezultă

$$p^2 = |\overrightarrow{m_a} \cdot \overrightarrow{i_a} + \overrightarrow{m_b} \cdot \overrightarrow{i_b} + \overrightarrow{m_c} \cdot \overrightarrow{i_c}| \le |\overrightarrow{m_a} \cdot \overrightarrow{i_a}| + |\overrightarrow{m_b} \cdot \overrightarrow{i_b}| + |\overrightarrow{m_c} \cdot \overrightarrow{i_c}| = m_a i_a + m_b i_b + m_c i_c.$$

Obţinem

$$p^2 \le m_a i_a + m_b i_b + m_c i_c.$$

6) Din (1) rezultă $m_a i_a \geqslant p(p-a)$ şi analoagele.

Apoi, din $p(p-a) \le m_a i_a$ reiese $\sqrt{p(p-a)} \leqslant \sqrt{m_a i_a} \le \dfrac{m_a + i_a}{2}$, de unde $m_a + i_a \ge 2\sqrt{p(p-a)}$. Astfel,

$$m_a + i_a + m_b + i_b + m_c + i_c \ge 2\left(\sqrt{p(p-a)} + \sqrt{p(p-b)} + \sqrt{p(p-c)}\right).$$

Aplicând inegalitatea mediilor obţinem

$$m_a + i_a + m_b + i_b + m_c + i_c \ge 6\sqrt[3]{pS}.$$

BIBLIOGRAFIE

[1] M. Chiriţă, D. Gheorghiu, *Aplicaţii ale calcului vectorial în matematica de liceu*, Ed.Sigma, 2003.

[2] G. Alric, A. Joffe; H. Tournier, *Géometrie vectorielle*, Ed. Mcgraw-Hill, Montreal, 1983.

[3] ∗ ∗ ∗ Gazeta Matematică, Colecţie 1980-2012.