PROBLEME PROPUSE

PROBLEME PENTRU EXAMENE NAŢIONALE[1)]

Clasa a IX-a

13. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cu proprietatea că
$$f(1-x) = f(1+x) \text{ şi } f(2-x) = f(2+x),$$
oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$. Arătaţi că f este funcţie periodică.

14. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cu proprietatea că $f \circ f(x) = 2x$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$. Determinaţi valorile lui $a \in \mathbb{R}$, ştiind că $f \circ f \circ f(x) = ax$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

15. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, f strict crescătoare cu proprietatea că $f \circ f(x) = x$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$. Arătaţi că $f(x) = x$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

16. Arătaţi că $\dfrac{1}{\sin 10^\circ} - \dfrac{\sqrt{2}}{\cos 10^\circ} = 4$.

17. Calculaţi $\sin \dfrac{3\pi}{8} \cdot \sin \dfrac{7\pi}{24}$.

18. Arătaţi că $\mathrm{tg}15^\circ \cdot \mathrm{tg}35^\circ \cdot \mathrm{tg}55^\circ \cdot \mathrm{tg}75^\circ = 1$.

Clasa a X-a

19. Determinaţi $n \geq 2$ astfel încât $C_n^0 + 2C_n^1 + C_n^2 = 36$.

20. Determinaţi numărul submulţimilor mulţimii $\{1, 2, \ldots, 10\}$ ce nu conţin 1 şi conţin 8.

21. Demonstraţi că 2!3!5! divide 10!.

22. Determinaţi numărul elementelor mulţimii
$$\{(a, b, c) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid a + b + c = 100\}.$$

23. Arătaţi că $C_{n+2}^{k+2} = C_n^{k+2} + 2C_n^{k+1} + C_n^k$, $0 \leq k \leq n-2$.

24. În câte moduri se pot aşeza 7 băieţi şi 8 fete la o masă circulară, astfel încât ambii vecini ai oricărui băiat să fie fete ?

Clasa a XI-a

25. Fie $\varepsilon = \cos \dfrac{2\pi}{3} + \mathrm{i} \sin \dfrac{2\pi}{3}$ şi $G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & \varepsilon & c \\ 0 & 0 & \varepsilon^2 \end{pmatrix} \,\middle|\, a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$.

a) Arătaţi că $\det(A) = 1$, oricare ar fi $A \in G$.

b) Arătaţi că $A^3 = I_3$,oricare ar fi $A \in G$.

c) Determinaţi suma elementelor inversei matricei $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \varepsilon & 1 \\ 0 & 0 & \varepsilon^2 \end{pmatrix}$.

26. Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln\left(x^2 - 2x + 5\right)$.

---

1) La problemele din această rubrică nu se primesc soluţii. (N.R.)

a) Calculaţi $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f(x) - 2\ln 2}{x-1}$.

b) Arătaţi că $f(x) \geq 2\ln 2$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

c) Determinaţi valorile reale ale lui m pentru care ecuaţia $f(x) = m$ are exact două soluţii reale şi distincte.

Clasa a XII-a

27. Se consideră polinomul $f = 3X^4 + 6X^3 + 2X^2 + 1$ şi $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{C}$ rădăcinile lui.

a) Calculaţi numărul $(x_1+1)(x_2+1)(x_3+1)(x_4+1)$.

b) Arătaţi că $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} + \dfrac{1}{x_3} + \dfrac{1}{x_4} = 0$.

c) Arătaţi că f nu are toate rădăcinile reale.

28. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin \dfrac{x}{2}$.

a) Calculaţi $\displaystyle\int_0^{\pi} x f(x)\mathrm{d}x$.

b) Calculaţi aria suprafeţei mărginite de graficul funcţiei f, axa Ox şi dreptele $x = 0$ şi $x = \dfrac{\pi}{2}$.

c) Calculaţi $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^{\frac{2\pi}{3}} f^n(x)\mathrm{d}x$.