O PROBLEMĂ DE TEORIA NUMERELOR

TRAIAN PREDA[1)] şi ANDREEA DIMA[2)]

Abstract. This note solves the problem of finding all triples of consecutive positive integers having all their prime factors one-digit numbers

Keywords: small primes, consecutive integers
MSC : 11A07

În Suplimentul cu Exerciţii al Gazetei Matematice, ianuarie 2013, primul dintre autorii acestui articol a propus următoarea problemă:

Demonstraţi că nu există patru numere naturale consecutive, mai mari ca 10, *care să aibă toţi factorii primi de o singură cifră.*

În continuare, vom numi *putere perfectă* orice număr natural de forma a^p, cu $a, p \in \mathbb{N}$ şi $p \geq 2$.

Pentru soluţia problemei putem folosi Teorema *Catalan-Mihăilescu*[3)] sau următoarea lemă (rezultat mai slab, dar mult mai uşor de demonstrat!):

Lemă. [1] *Ecuaţia* $p_1^r - p_2^s = 1$, *cu* $r, s \geq 2$ *şi* p_1, p_2 *numere prime, are soluţia unică* $(p_1 = 3, p_2 = 2, r = 2, s = 3)$, *corespunzătoare egalităţii* $3^2 - 2^3 = 1$. □

Revenind la rezolvare, să presupunem prin absurd că există patru numere naturale consecutive a, $a+1$, $a+2$, $a+3$ care să aibă toţi factorii primi din mulţimea $\{2, 3, 5, 7\}$ şi $a \geq 10$. Dintre cele 4 numere două sunt pare iar, în afară de ele, celelalte numere sunt două câte două relativ prime – cu excepţia, eventual, a cazului când $(a, a+3) = 3$. Astfel, există posibilităţile:

I) *Fiecare număr impar are câte un singur factor prim.* În această situaţie numerele impare sunt puteri perfecte şi:

– a) fie unul dintre cele două numere pare este o putere naturală a lui 2 – caz în care se contrazice lema;

– b) fie unul dintre numerele a şi $a+3$ este de forma 3^m, iar celălalt este de forma $3 \cdot 2^n$ cu $m, n \in \mathbb{N}^*$ – caz în care, folosind lema, obţinem $a = 24$, $a+3 = 27$, deci $a+2 = 26$ ar avea factorul prim 13 – fals.

II) *Unul dintre numerele impare are doi factori primi* (iar celălalt unul singur). În acest caz, numărul par dintre ele trebuie să fie o putere a lui 2, şi se contrazice, din nou, lema.

Pornind de la această problemă vom demonstra următorul rezultat.

Teoremă. *Singurele triplete de numere naturale consecutive, mai mari ca* 10 *şi care au toţi factorii primi de o singură cifră sunt* $(14, 15, 16)$ *şi* $(48, 49, 50)$.

---

1) Profesor, Ş.g. „Sf. Andrei“, Bucureşti.
2) Elevă, Colegiul Naţional de Informatică „Tudor Vianu“, Bucureşti.

3) Singurele puteri perfecte consecutive sunt $8 = 2^3$ şi $9 = 3^2$.

Demonstraţie. Din lemă rezultă că nu există două numere consecutive dintre cele trei de forma p_1^r, p_2^s, unde p_1, p_2 sunt numere prime. Astfel, sunt posibile cazurile următoare.

I) *a este par.* Deoarece $(a, a+2) = 2$ şi $(a, a+1) = (a+1, a+2) = 1$, avem variantele

• $\{a, a+2\} = \{2p_1^r, 2^m\}$. În acest caz $|p_1^r - 2^{m-1}| = 1$ şi obţinem tripletele $(16, 17, 18)$ – care nu convine şi $(14, 15, 16)$, care convine;

• $a = 2^m 3^n$, $a+1 = 5^p$, $a+2 = 2^q 7^r$, $n, r > 0$. Atunci $a+1 \equiv 6 \pmod 7$ şi, analizând puterile lui 5 mod 7, deducem $p \equiv 3 \pmod 6$. Dar atunci $a \equiv 5^p - 1 \equiv 1 \pmod 3$ – contradicţie;

• $a = 2^m 7^n$, $a+1 = 5^p$, $a+2 = 2^q 3^r$, $n, r > 0$. Atunci $a+1 \equiv 2 \pmod 3$ şi, analizând puterile lui 5 mod 3, deducem $p \equiv 1 \pmod 2$. Dar atunci $a \equiv 5^p - 1 \in \{2, 4, 5\} \pmod 7$ – contradicţie;

• $a = 2^m 5^n$, $a+1 = 7^p$, $a+2 = 2^q 3^r$, $n, r > 0$. Atunci $a+1 \equiv 1 \pmod 3$ şi $a+2 \equiv 0 \pmod 3$ – contradicţie;

• $a = 2^m 3^n$, $a+1 = 7^p$, $a+2 = 2^q 5^r$, $n, r > 0$. Atunci $a+1 \equiv 9 \pmod{10}$ şi, analizând puterile lui 7 mod 10, deducem $p \equiv 2 \pmod 4$. Sunt posibile subcazurile:

A) $m \geq 2$, deci $q = 1$, $a+2 = 2 \cdot 5^r \equiv 1 \pmod 7$, ceea ce implică $r \equiv 2 \pmod 6$. În cazul $n > 1$ aceasta ar duce la $a+2 \equiv 2 \pmod 9$, adică $5^r \equiv 1 \pmod 9$ – contradicţie cu $r \equiv 2 \pmod 6$, iar în cazul $n = 1$ avem situaţiile:

A$_1$) $m > 4$, care ar duce la $7^p = a+1 \equiv 1 \pmod{32}$ – imposibil (să nu uităm că $p \equiv 2 \pmod 4$) şi

A$_2$) $m \leqslant 4$ – situaţie în care, verificând toate posibilităţile, obţinem soluţia $(48, 49, 50)$;

B) $m = 1$, care ar duce la $7^p = a+1 \equiv 3 \pmod 4$ – în contradicţie cu $p \equiv 2 \pmod 4$;

• $a = 2^m 5^n$, $a+1 = 3^p$, $a+2 = 2^q 7^r$, $n, r > 0$. Atunci $3^p = a+1 \equiv 1 \pmod{10}$ şi, analizând puterile lui 3 mod 10, deducem $p \equiv 0 \pmod 4$. În acest caz $a+1 = 3^p \equiv 1 \pmod 4$, $a+2 \equiv 2 \pmod 4$, $q = 1$, $a+2 \equiv 2 \pmod 3$ – contradicţie cu $a+1 = 3^p$;

• $a = 2^m 7^n$, $a+1 = 3^p$, $a+2 = 2^q 5^r$, $n, r > 0$. Atunci $3^p = a+1 \equiv 9 \pmod{10}$ şi, analizând puterile lui 3 mod 10, deducem $p \equiv 2 \pmod 4$, apoi $a+1 \equiv 1 \pmod 4$, $a+2 \equiv 2 \pmod 4$, $q = 1$ şi $m > 1$, $a \equiv 2 \pmod 3$, m este impar (şi mai mare ca 1), $a \equiv 0 \pmod 8$, $2 \cdot 5^r = a+2 \equiv 2 \pmod 8$, $5^r \equiv 1 \pmod 4$, r este par, $a+1 = 2 \cdot 5^r - 1 \equiv 1 \pmod 3$ – imposibil.

II) *a este impar*, cu variantele:

• $a = 3^m$, $a+1 = 2^n 5^p$, $a+2 = 7^q$, $m, n, p, q > 0$. Atunci $a \equiv 0 \pmod 3$ şi $a+2 \equiv 1 \pmod 3$ – contradicţie;

• $a = 3^m$, $a+1 = 2^n 7^p$, $a+2 = 5^q$, $m, n, p, q > 0$. Atunci $a+2 \equiv 1 \pmod 4$, $n > 1$ şi avem variantele:

A) $n = 2$, de unde $a+1 = 4 \cdot 7^p \equiv 4 \pmod 8$, $5^q = a+2 \equiv 5 \pmod 8$, q este impar – contradicţie cu $5^q = (a+1)+1 \equiv 1 \pmod 7$;

B) $n > 2$, de unde $a \equiv 7 \pmod 8$ – contradicţie cu $a = 3^m \in \{1, 3\} \pmod 8$

• $a = 5^m$, $a + 1 = 2^n 3^p$, $a + 2 = 7^q$, $m, n, p, q > 0$. Atunci $a = 5^m \equiv 1 \pmod 4$ şi avem variantele:

A) $m = 1$, de unde $a = 5$ – nu convine;

B) $m > 1$, de unde $a \equiv 25 \pmod{100}$, deci $7^q = a+2 \equiv 27 \pmod{100}$ – contradicţie;

• $a = 5^m$, $a + 1 = 2^n 7^p$, $a + 2 = 3^q$, $m, n, p, q > 0$. Atunci $a = 5^m \equiv 1 \pmod 4$, $a+1 \equiv 2 \pmod 4$, $n = 1$, $3^q = a+2 = 2 \cdot 7^p + 1 \equiv 1 \pmod 7$, $q \equiv 0 \pmod 6$, $a + 2 \in \{1, 9\} \pmod{10}$ – contradicţie cu $a = 5^m \equiv 5 \pmod{10}$;

• $a = 7^m$, $a+1 = 2^n 3^p$, $a+2 = 5^q$, $m, n, p, q > 0$. Atunci $a+2 = 5^q \equiv 25 \pmod{100}$, de unde $23 \equiv a \equiv 7^m \pmod{100}$ – contradicţie;

• $a = 7^m$, $a+1 = 2^n 5^p$, $a+2 = 3^q$, $m, n, p, q > 0$. Atunci $3^q = a+2 \equiv 2 \pmod 7$, $q \equiv 2 \pmod 6$, $a + 2 = 3^q \equiv 1 \pmod 8$, $a \equiv 7 \pmod 8$, $m \equiv 1 \pmod 2$, $7^m = a \in \{3, 7\} \pmod{10}$, $a + 1 \in \{4, 8\} \pmod{10}$ – contradicţie cu $a = 2^n 5^p \equiv 0 \pmod{10}$.

Observaţie. Din teorema demonstrată rezultă imediat problema iniţială, deoarece niciunul dintre tripletele din teoremă nu poate fi „prelungit" pentru a obţine patru numere consecutive cu factori primi mai mici decât 10.

BIBLIOGRAFIE

[1] L. Panaitopol, A. Gica, *Probleme de aritmetică şi teoria numerelor*, Editura Gil, ex. 11, pag. 96.