PROBLEME PENTRU EXAMENE NAŢIONALE

Clasa a IX-a

13. Există funcţii $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cu proprietatea că $f(x) + f(1-x) = x^2$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$?

14. Să se determine toate funcţiile $f : \{1,2,3\} \to \{1,2,4\}$ cu
$$f(1) + f(2) + f(3) = 4.$$

15. Câte funcţii $f : \{1,2,3,4\} \to \{1,2,3,4\}$ au proprietatea că $f(x)$ este par dacă şi numai dacă x este par ?

16. Determinaţi funcţiile $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ cu proprietatea că
$$f(x+y) = f(x) + f(y), \quad \forall\, x, y \in \mathbb{Z}.$$

17. Să se arate că funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{Q} \\ 1, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ este periodică.

18. Există funcţii $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ astfel încât
$$f(f(x)) = 3x \text{ şi } f(f(f(x))) = 5x,$$
oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$?

Clasa a X-a

19. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia $1 + 2^x + 3^x = 6^x$.

20. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia $\sin x + \sin 3x = \sin 2x$.

21. Fie $A \in \{x \in \mathbb{R} \mid \sin x + \cos x = 1\}$ şi $B = \{x \in \mathbb{R} \mid \sin 2x = 0\}$. Să se arate că $A \subset B$ şi $A \neq B$.

22. Ecuaţia $\sin x = a$ are două soluţii cu diferenţa egală cu $\dfrac{\pi}{6}$.
Să se determine a.

23. Să se construiască o funcţie bijectivă $f : \mathbb{R} \to (-1, 1)$.

24. Să se determine funcţiile injective $f \colon \{1,2,\ldots,n\} \to \{1,2,\ldots,n\}$ cu
$$f(1) + 1 < f(2) + 2 < \ldots < f(n) + n.$$

Clasa a XI-a

25. Se consideră matricea $A \begin{pmatrix} a & a+1 & a+2 \\ b-1 & b & b+1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, unde a, b sunt numere reale.

a) Să se calculeze $\det(A)$.
b) Să se arate că rangul lui A este 2, oricare ar fi numerele reale a şi b.
c) Dacă $a = 1$ şi $b = 1$, să se calculeze A^{2015}.

26. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \operatorname{arctg}(x + e^x)$.
a) Să se determine $f'(x),\ x \in \mathbb{R}$.
b) Să se arate că f este strict crescătoare.
c) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$.

Clasa a XII-a

27. Fie $d \in \mathbb{N}$ astfel încât $\sqrt{d} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ şi inelul $\left(\mathbb{Z}\left[\sqrt{d}\right], +, \cdot\right)$,unde

$$\mathbb{Z}\left[\sqrt{d}\right] = \left\{a + b\sqrt{d} \mid a, b \in \mathbb{Z}\right\}.$$

a) Să se arate că $\mathbb{Z}\left[\sqrt{12}\right] \subset \mathbb{Z}\left[\sqrt{3}\right]$.
b) Să se arate că numărul elementelor inversabile din inelul $\mathbb{Z}\left[\sqrt{3}\right]$ este infinit.
c) Să se arate că nu există niciun morfism de inele $f : \mathbb{Z}\left[\sqrt{3}\right] \to \mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]$.

28. Fie $I_n = \int\limits_0^1 x^n \operatorname{arctg} x \, dx,\ n \in \mathbb{N}^*$.
a) Să se calculeze I_1. b) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} I_n$.
c) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{I_n}{I_{n+1}}$.