PENTRU CERCURILE DE ELEVI

UN ARGUMENT DE MEDIE

Neculai Stanciu[1)] şi Titu Zvonaru[2)]

Vom rezolva în cele ce urmează câteva probleme care au la bază aceeaşi idee simplă.

Dacă $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *sunt numere reale, atunci*

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n \geq s \Rightarrow \max(a_1, a_2, \ldots, a_n) \geq \frac{s}{n}$$
$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n \leq s \Rightarrow \min(a_1, a_2, \ldots, a_n) \leq \frac{s}{n}.$$

Demonstraţia este evidentă, deoarece relaţiile de mai sus spun în esenţă că dacă media aritmetică a unor numere este mai mare sau cel puţin egală cu un număr a atunci cel mai mare număr este cel puţin a, iar dacă media lor aritmetică este cel mult a atunci cel mai mic număr este cel mult a.

1. (*Marcel Chiriţă*) *Demonstraţi că dacă* a, b, c *sunt numere reale pozitive, atunci*

$$\max\left\{\left(1+\frac{a}{b}\right)\left(1+\frac{a}{c}\right), \left(1+\frac{b}{a}\right)\left(1+\frac{b}{c}\right), \left(1+\frac{c}{a}\right)\left(1+\frac{c}{b}\right)\right\} \geq 4.$$

Soluţie. Inegalitatea dorită rezultă dacă vom demonstra că

$$\left(1+\frac{a}{b}\right)\left(1+\frac{a}{c}\right) + \left(1+\frac{b}{a}\right)\left(1+\frac{b}{c}\right) + \left(1+\frac{c}{a}\right)\left(1+\frac{c}{b}\right) \geq 12. \quad (1)$$

Aplicând inegalitatea dintre media aritmetică şi media geometrică obţinem

$$\left(1+\frac{a}{b}\right)\left(1+\frac{a}{c}\right) + \left(1+\frac{b}{a}\right)\left(1+\frac{b}{c}\right) + \left(1+\frac{c}{a}\right)\left(1+\frac{c}{b}\right) \geq$$
$$\geq 2\sqrt{\frac{a}{b}} \cdot 2\sqrt{\frac{a}{c}} + 2\sqrt{\frac{b}{a}} \cdot 2\sqrt{\frac{b}{c}} + 2\sqrt{\frac{c}{a}} \cdot 2\sqrt{\frac{c}{b}} = 4\left(\frac{a}{\sqrt{bc}} + \frac{b}{\sqrt{ac}} + \frac{c}{\sqrt{ab}}\right) \leq$$
$$\geq 4 \cdot 3\sqrt[3]{\frac{a}{\sqrt{bc}} \cdot \frac{b}{\sqrt{ac}} \cdot \frac{c}{\sqrt{ab}}} = 12,$$

deci (1) este adevărată.

2. (Olimpiadă Spania) *Fie* r, s, u, v *numere reale. Demonstraţi că*

$$\min\left\{r - s^2, s - u^2, u - v^2, v - r^2\right\} \leq \frac{1}{4}.$$

Soluţie. Vom demonstra că

$$r - s^2 + s - u^2 + u - v^2 + v - r^2 \leq 1.$$

[1)]Profesor, Şc. gen. „George Emil Palade", Buzău
[2)]Profesor, Şc. gen., Comăneşti, jud. Bacău

Într-adevăr, ultima inegalitate este echivalentă cu

$$\left(r-\frac{1}{2}\right)^2+\left(s-\frac{1}{2}\right)^2+\left(u-\frac{1}{2}\right)^2+\left(v-\frac{1}{2}\right)^2\geq 0,$$

deci este adevărată.

3. (*Dumitru Acu*, G.M.-B) *Fie numerele* $a_1, a_2, \ldots, a_n$, *cu* $n \geq 3$. *Să se arate că cel puţin unul dintre numerele*

$$(a_1+a_2+\ldots+a_n)^2-(n^2-n+2)a_ia_j, 1\leq i<j\leq n,$$

este mai mare sau egal cu 0.

Soluţie. Concluzia dorită rezultă dacă vom demonstra că suma celor $\dfrac{n(n-1)}{2}$ numere de tipul $(a_1+a_2+\ldots+a_n)^2-(n^2-n+2)a_ia_j$ este pozitivă, adică, prin transformări echivalente,

$$\sum_{1\leq i<j\leq n}\left((a_1+a_2+\ldots+a_n)^2-(n^2-n+2)a_ia_j\right)\geq 0$$

$$\frac{n(n-1)}{2}(a_1+a_2+\ldots+a_n)^2-\sum_{1\leq i<j\leq n}(n^2-n+2)a_ia_j\geq 0$$

$$\frac{n(n-1)}{2}\sum_{i=1}^n a_i^2+2\cdot\frac{n(n-1)}{2}\sum_{1\leq i<j\leq n}a_ia_j-(n^2-n+2)\sum_{1\leq i<j\leq n}a_ia_j\geq 0$$

$$\frac{n(n-1)}{2}\sum_{i=1}^n a_i^2-2\sum_{1\leq i<j\leq n}a_ia_j\geq 0$$

$$\sum_{1\leq i<j\leq n}(a_i-a_j)^2+\frac{(n-1)(n-2)}{2}\sum_{i=1}^n a_i^2\geq 0,$$

evident adevărat. (Am folosit faptul că $n-1+\dfrac{(n-1)(n-2)}{2}=\dfrac{n(n-1)}{2}$).

4. (Concurs, America de Sud) *Fie* 100 *de numere naturale nenule cu proprietatea că suma lor este egală cu produsul lor. Determinaţi numărul minim de apariţii ale lui* 1 *printre cele* 100 *de numere.*

Soluţie. Fie $x_{100}\leq x_{99}\leq\ldots\leq x_2\leq x_1$ cele 100 de numere şi $k_{\min}$ numărul minim de apariţii a lui 1. Ecuaţia

$$x_{100}+x_{99}+\ldots+x_2+x_1=x_{100}x_{99}\ldots x_2x_1$$

poate fi scrisă sub forma

$$\frac{x_{100}}{x_{100}x_{99}\ldots x_2x_1}+\frac{x_{99}}{x_{100}x_{99}\ldots x_2x_1}+\ldots+\frac{x_2}{x_{100}x_{99}\ldots x_2x_1}+\frac{x_1}{x_{100}x_{99}\ldots x_2x_1}=1.$$

Deoarece $x_{100}\leq x_{99}\leq\ldots\leq x_2\leq x_1$, rezultă că

$$\frac{x_1}{x_{100}x_{99}\ldots x_2x_1}\geq\frac{1}{100},$$

adică

$$x_{100}x_{99}\dots x_2 \le 100.$$

Deducem că, cel mult 6 dintre numerele $x_{100}, x_{99}, \dots, x_2$ pot fi mai mari ca 1, deci $k_{\min} \ge 93$.

În cazul $k_{\min} = 93$ obţinem ecuaţia

$$93 + x_7 + x_6 + x_5 + x_4 + x_3 + x_2 + x_1 = x_1x_2x_3x_4x_5x_6x_7,$$

unde $x_1 \ge x_2 \ge x_3 \ge x_4 \ge x_5 \ge x_6 \ge x_7 \ge 2$. Avem

$$93 + 7x_1 \ge 93 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = x_1x_2x_3x_4x_5x_6x_7 \ge 2^6x_1,$$

adică $57x_1 \le 93$, contradicţie cu $x_1 \ge 2$.

În cazul $k_{\min} = 94$ obţinem $94+x_6+x_5+x_4+x_3+x_2+x_1 = x_1x_2x_3x_4x_5x_6$ şi avem

$$94 + 6x_1 \ge 94 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = x_1x_2x_3x_4x_5x_6 \ge 32x_1,$$

adică $26x_1 \le 94$.

Dacă $x_1 = 2$, atunci $x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = x_6 = 2$ şi nu obţinem soluţie (deoarece $94 + 6 \cdot 2 \ne 2^6$).

Dacă $x_1 = 3$, ecuaţia devine $97 + x_6 + x_5 + x_4 + x_3 + x_2 = 3x_2x_3x_4x_5x_6$. Deducem că

$$97 + 5x_2 \ge 97 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 3x_2x_3x_4x_5x_6 \ge 3 \cdot 16x_2$$

şi deci $43x_2 \le 97$, adică $x_2 = 2$. Obţinem $x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = x_6 = 2$ şi nu există soluţie în acest caz (deoarece $97 + 5 \cdot 2 \ne 3 \cdot 32$).

Deoarece ecuaţia $95 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = x_1x_2x_3x_4x_5$, are soluţia $x_1 = x_2 = x_3 = 3, x_4 = x_5 = 2$ $(95 + 3 \cdot 3 + 2 \cdot 2 = 108, 3^3 \cdot 2^2 = 108)$, rezultă $k_{\min} = 95$.

5. (Concurs Slovacia) *Un comitet format din nouă membri trebuie să aleagă un câştigător al unui concurs la care sunt trei participanţi. Fiecare membru al comitetului ordonează candidaţii şi acordă 3 puncte primului, 2 puncte celui de-al doilea şi 1 punct ultimului. După însumarea punctelor, nu există doi candidaţi cu acelaşi număr de puncte, deci ordinea este clară. Cineva observă acum că dacă fiecare membru al comitetului ar fi ales un singur candidat, atunci ordinea candidaţilor ar fi fost inversată. Care este punctajul obţinut de cei trei candidaţi ?*

Soluţie. Fie C_1, C_2, C_3 cei trei candidaţi, cu ordinea finală $C_1 - C_2 - C_3$. Notăm cu $s(C_1)$, $s(C_2)$, $s(C_3)$ suma punctelor obţinute de candidaţii C_1, C_2, respectiv C_3.

Pentru $i = 1, 2, 3$ notăm:

x_i – de câte ori a ocupat C_i primul loc;
y_i – de câte ori a ocupat C_i al doilea loc;
z_i – de câte ori a ocupat C_i ultimul loc.

Avem $s(C_i) = 3x_i + 2y_i + z_i$, $i \in \{1,2,3\}$, cu $x_i + y_i + z_i = 9$, $i \in \{1,2,3\}$ şi

$$x_1 + x_2 + x_3 = 9, \quad y_1 + y_2 + y_3 = 9, \quad z_1 + z_2 + z_3 = 9.$$

Suma tuturor punctelor acordate este $9 \cdot (3 + 2 + 1) = 54$.

Deoarece $s(C_1) + s(C_2) + s(C_3) = 54$ şi $s(C_1) > s(C_2) > s(C_3)$, deducem că $s(C_3) < 18$. Analog, din $x_1 < x_2 < x_3$ şi $x_1 + x_2 + x_3 = 9$, rezultă că $x_3 \geq 4$.

– dacă $x_3 \geq 6$, atunci $s(C_3) \geq 18$, contradicţie;

– dacă $x_3 = 5$, atunci $y_3 + z_3 = 4$ şi $s(C_3) = 15 + 4 + y_3 > 18$, din nou o contradicţie.

Rezultă că $x_3 = 4$, şi atunci din $x_1 + x_2 = 5$ şi $x_1 < x_2 < x_3$ deducem că $x_1 = 2, x_2 = 3$. Avem:

$$s(C_1) = 6 + y_1 + z_1 + y_1 = 13 + y_1;$$
$$s(C_2) = 9 + y_2 + z_2 + y_2 = 15 + y_2;$$
$$s(C_3) = 12 + y_3 + z_3 + y_3 = 17 + y_3.$$

Deoarece $s(C_3) < 18$, obţinem $y_3 = 0$ şi $y_1 + y_2 = 9$.

Cum $s(C_1) > s(C_2) > s(C_3)$ deducem că $y_1 > y_2 + 2$ şi $y_2 > y_3 + 2 = 2$.

Acum este uşor de văzut că singura posibilitate este $y_2 = 3, y_1 = 6$; prin urmare

$$s(C_1) = 19, \quad s(C_2) = 18, \quad s(C_3) = 17.$$

6. (*Aurelia Caţaros* şi *Gabriela Ruse*) *Găsiţi numerele reale a şi b dacă*

$$\max\left\{a^2 - b + 1, b^2 + a + 1\right\} \leq \frac{3}{4}.$$

Soluţie. Calculând suma expresiilor $a^2 - b + 1$ şi $b^2 + a + 1$ avem

$$\begin{aligned} a^2 - b + 1 + b^2 + a + 1 &= a^2 + a + \frac{1}{4} + b^2 - b + \frac{1}{4} + 2 - \frac{1}{2} \\ &= \left(a + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(b - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{2} \geq \frac{3}{2}. \end{aligned} \tag{2}$$

Ţinând cont de relaţia din enunţ, rezultă că avem egalitate în (2), deci $a = -\dfrac{1}{2}$, $b = \dfrac{1}{2}$.

Într-adevăr, pentru aceste valori avem $a^2 - b + 1 = b^2 + a + 1 = \dfrac{3}{4}$.

7. *Fie* $x_1, x_2, \ldots, x_{15}$ *numere naturale astfel încât*

$$(x_1 + 1)(x_2 + 1)\ldots(x_{15} + 1) = 2012x_1x_2\ldots x_{15}.$$

Să se demonstreze că dintre numerele $x_1, x_2, \ldots, x_{15}$ *cel puţin* 6 *şi cel mult* 10 *sunt egale cu* 1.

Soluţie. Presupunem că $x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_{15}$. Relaţia dată se poate scrie

$$P = \left(1 + \frac{1}{x_1}\right)\left(1 + \frac{1}{x_2}\right)\ldots\left(1 + \frac{1}{x_{15}}\right) = 2012. \tag{3}$$

Dacă presupunem că sunt cel mult 5 numere egale cu 1, atunci

$$P \leq 2^5 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{10} = \left(\frac{9}{2}\right)^5 = (4{,}5)^5 < 2012$$

– contradicţie. Rezultă că dintre numerele $x_1, x_2, \ldots, x_{15}$ cel puţin 6 sunt egale cu 1. Să presupunem acum că sunt cel puţin 11 numere egale cu 1, deci $x_1 = x_2 = \ldots = x_{11} = 1$. Atunci

$$P \geq 2^{11} = 2048 > 2012$$

–contradicţie – deci presupunerea este falsă.

Observaţie. O familie de numere care verifică (3) este

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_9 = 1,\ x_{10} = 2,\ x_{11} = 3,\ x_{12} = x_{13} = x_{14} = 4, x_{15} = 500.$$

Lăsăm cititorului sarcina de a găsi şi alte numere care verifică (3).