PROBLEME PENTRU EXAMENE NAŢIONALE[1)]

Clasa a VII-a

1. Calculaţi pătratul numărului $1,2 + \frac{2}{3} : \frac{10}{9}$.

2. Câte numere naturale de forma $\overline{aba}$ sunt divizibile cu 2?

3. Care este probabilitatea ca alegând un număr mai mic sau egal cu 50 acesta să fie prim?

4. Unghiul dintre bisectoarea unui unghi şi una dintre laturile sale are măsura de 40°. Ce măsură are unghiul?

5. Un triunghi echilateral are perimetrul egal cu 24 cm. Cât este aria triunghiului determinat de mijloacele laturilor sale?

6. Într-un triunghi dreptunghic mediana corespunzătoare ipotenuzei este congruentă cu una dintre catete. Aflaţi măsurile unghiurilor tringhiului.

Clasa a VIII-a

7. Comparaţi numerele $a = 2\sqrt{3} - 4$ şi $b = 3\sqrt{2} - 3$.

8. Dacă $a + b = 5$ şi $a^2 - b^2 = 20$, calculaţi $a - b$.

9. Aflaţi suma elementelor mulţimii $A = [-3, 10) \cap \mathbb{N}$.

10. Într-un cub diagonala unei feţe are lungimea de 4 cm. Aflaţi lungimea diagonalei cubului.

11. Fie ABC un triunghi echilateral şi $AMperp(ABC)$. Dacă $AB = 12$ cm şi $AM = 4$ cm, calculaţi distanţa de la M la centrul cercului circumscris triunghiului ABC.

12. Fie A, B, C, D patru puncte necoplanare astfel încât $AB = AC$ şi $DB = DC$. Aflaţi măsura unghiului dintre dreptele AD şi BC.

Clasa a IX-a

13. Să se determine $a \in \mathbb{R}$ ştiind că a, $4a+1$ şi $11a+2$ sunt în progresie aritmetică.

14. Să se arate că şirul $x_n = \frac{3^n}{n!}$, $n \geq 3$, este strict crescător.

15. Să se arate că şirul $x_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n+3}$, $n \geq 0$, este mărginit.

16. Să se arate că şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ definit prin $x_1 = 2$ şi $x_{n+1} = \sqrt{1 + x_n}$ este monoton şi mărginit.

[1)] La problemele din această rubrică nu se primesc soluţii. (N.R.)

17. Se consideră progresia geometrică $(a_n)_{n\geq 1}$ cu $a_1 = \dfrac{1}{1024}$ şi raţia $q = 3$. Câţi termeni ai progresiei $(a_n)_{n\geq 1}$ aparţin mulţimii $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$?

18. Fie progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$ cu $a_1 = 1$ şi raţia $r = 4$. Să se calculeze $a_1 + 3a_2 + 3^2a_3 + \ldots + 3^9a_{10}$.

Clasa a X-a

19. Să se arate că $\sqrt[7]{7} < \sqrt[3]{3}$.

20. Fie $a = 5+2\sqrt{6}$. Să se arate că $a^5 + \dfrac{1}{a^5} - 10$ este un număr natural divizibil cu 960.

21. Fie $z_1 = 5 + 12\mathrm{i}$ şi $z_2 = \sqrt{69} + 10\mathrm{i}$. Să se arate că numărul $\dfrac{z_1^2 + z_2^2}{169 + z_1^2 z_2^2}$ este număr real.

22. Fie z_1, z_2 soluţiile ecuaţiei $z^2 - 8z + 20 = 0$ şi z_3, z_4 soluţiile ecuaţiei $z^2 - 10z + 26 = 0$. Să se determine $z_0 \in \mathbb{C}$ astfel încât

$$|z_1 - z_0| = |z_2 - z_0| = |z_3 - z_0| = |z_4 - z_0|\,.$$

23. Fie $z_1 = 3 + \mathrm{i}$, $z_2 = 3 - \mathrm{i}$ şi $z_3 = 2 - 2\mathrm{i}$. Să se determine afixul ortocentrului triunghiului cu vârfurile în punctele de afixe z_1, z_2 şi respectiv z_3.

24. Rezolvaţi ecuaţia $x^4 = 1 - \mathrm{i}$, $x \in \mathbb{C}$.

Clasa a XI-a

25. Se consideră matricile $A(a,b) = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 \\ b & 0 & a \end{pmatrix}$ cu $a, b \in \mathbb{R}$.

a) Să se calculeze $\det(A(1,2))$.

b) Să se arate că $A(a,b)$ este inversabilă dacă şi numai dacă a şi b au module diferite.

c) Să se calculeze suma elementelor matricei $(A(2,1))^{10}$.

26. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{arctg}(x) - \dfrac{\ln\left(1 + x^2\right)}{1 + x^2}$.

a) Să se calculeze $f'(x)$,$x \in \mathbb{R}$.

b) Să se arate că f este funcţie mărginită.

c) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{\ln\left(1 + x^2\right)}$.

Clasa a XII-a

27. Se consideră polinomul $f = X^4 + aX^3 + aX^2 + 2X - 4$, unde $a \in \mathbb{R}$.

a) Să se determine a ştiind că restul împărţirii lui f la $X + 2$ este 3.

a) Să se arate că f are cel puţin o rădăcină reală.

c) Dacă $a \in \left(0, \frac{8}{3}\right)$, să se arate că f nu are toate rădăcinile reale.

28. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln\left(1 + x^2\right)$.

a) Să se calculeze $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

b) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_0^1 f\left(\frac{x}{n}\right)\mathrm{d}x$.

c) Fie funcţia $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $g(x) = xf(x)$. Să se calculeze volumul corpului obţinut prin rotirea graficului funcţiei g în jurul axei Ox.