PENTRU CERCURILE DE ELEVI

TEOREMA BISECTOAREI GLISANTE

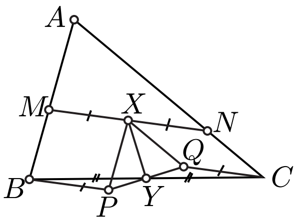
Petru Marian Braica[1] şi Călin Durla[2]

În această lecţie vom prezenta o teoremă pe care o putem numi *a bisectoarei glisante*, precum şi exemple de folosire a acesteia.

Lecţia este utilă elevilor din clasele a VII-a, a VIII-a sau a IX-a. Demonstraţiile sunt date pe cale sintetică, iar cititorii pot încerca şi tehnici vectoriale, analitice sau folosind numere complexe.

Enunţul teoremei bisectoarei glisante este:

Teoremă. *Fie ABC un triunghi oarecare, iar punctele M şi N pe laturile (AB) şi (AC), astfel încât $BM = CN$. Dacă mijloacele segmentelor (MN) şi (BC) se notează cu X şi Y, atunci dreapta XY este paralelă sau coincide cu bisectoarea unghiului BAC.*



Demonstraţie. Construim paralelogramele $MXPB$ şi $XNCQ$, iar din $BP \| MN \| CQ$ şi $BP \equiv$ $\equiv MN \equiv CQ$ obţinem imediat că $(BP) \equiv (CQ)$ şi $BP \| CQ$. Din $\sphericalangle PBY \equiv \sphericalangle QCY$ (alterne interne), împreună cu $(PB) \equiv (CQ)$ şi $(BY) \equiv (YC)$ avem, conform cazului (L.U.L.), că $\triangle PBY \equiv \triangle QCY$.

În concluzie, $\sphericalangle PYB \equiv \sphericalangle CYQ$, iar B, Y, C coliniare asigură coliniaritatea punctelor P, Y, Q. În triunghiul XPQ, în care $XP = MB = NC =$ $= XQ$, (XY) este mediană, deci şi bisectoare. Deoarece $\sphericalangle PXY \equiv \sphericalangle QXY$ şi $XP \| AB$ şi $XQ \| AC$, obţinem imediat concluzia teoremei, $\sphericalangle PXQ$ şi $\sphericalangle BAC$ având laturile paralele. $\square$

Ce se întâmplă dacă luăm triunghiuri isoscele cu vârfurile în B şi C şi (MN) este segmentul determinat de mijloacele bazelor acestor triunghiuri? Răspunsul este dat de următorul rezultat.

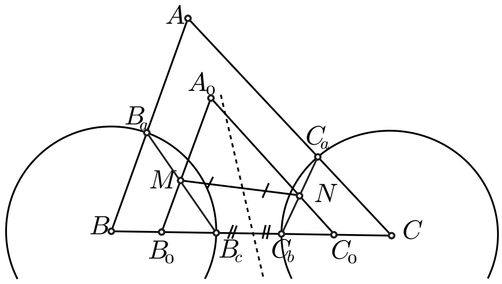
---

[1] Profesor, Ş. g. „Grigore Moisil“, Satu Mare, pbraica@yahoo.com

[2] Profesor, Ş. g. „Grigore Moisil“, Satu Mare, calindurla.isjsm@yahoo.com

Problema 1. *Într-un triunghi oarecare ABC, $\mathcal{C}\ (B;r) \cap AB = \{B_a\}$, $\mathcal{C}\ (B;r) \cap BC = \{B_c\}$; $\mathcal{C}\ (C;r) \cap BC = \{C_b\}$* şi *$\mathcal{C}\ (C;r) \cap CA = \{C_a\}$.*

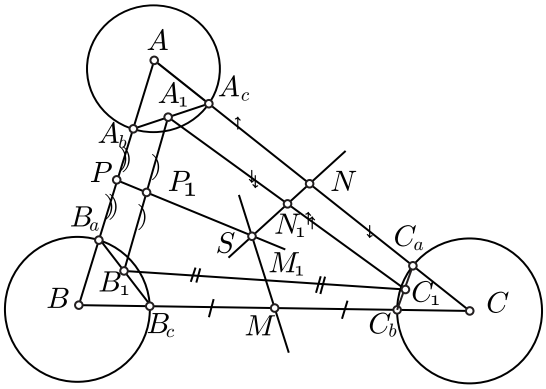
Fie M şi N mijloacele segmentelor (B_aB_c) şi (C_bC_a). Dreapta determinată de mijlocul segmentului (MN) şi a segmentului (B_cC_b) coincide sau este paralelă cu bisectoarea $\sphericalangle BAC$.



Demonstraţie. Construim paralela prin M la AB şi paralela prin N la AC, care se intersectează în A_0 şi taie BC în B_0, respectiv C_0. Deoarece $(MB_0$ este linie mijlocie în $\triangle BB_aB_c$ şi (NC_0) este linie mijlocie în triunghiul $\triangle CC_aC_b$, obţinem că $MB_0 = NC_b$ şi segmentele (B_0C_0) şi (B_cC_b) şi (BC) au acelaşi mijloc. În concluzie, în $\triangle A_0B_0C_0$ se poate aplica teorema bisectoarei glisante, iar bisectoarea $\sphericalangle B_0A_0C_0$ e paralelă sau coincide cu dreapta determinată de mijloacele segmentelor (MN) şi (B_cC_b). Cum $\sphericalangle BAC$ şi $\sphericalangle B_0A_0C_0$ au laturile paralele, concluzia este imediată.

O consecinţă imediată este legată de concurenţa acestor drepte separatoare, prezentată în:

Corolarul 1. *Trei cercuri congruente au centrele în vârfurile triunghiului $\triangle ABC$ şi intersectează laturile acestuia astfel: $\mathcal{C}_a(A;r) \cap AB = \{A_b\}$; $\mathcal{C}_a(A;r) \cap AC = \{A_c\}$, $\mathcal{C}_b(B;r) \cap BC = \{B_c\}$, $\mathcal{C}_b(B;r) \cap AB = \{B_a\}$ şi $\mathcal{C}_c(C;r) \cap BC = \{C_b\}$; $\mathcal{C}_c(C;r) \cap CA = \{C_a\}$. Atunci dreptele determinate de mijloacele segmentelor $[BC]$ şi $[B_1C_1]$; $[AC]$ şi $[A_1C_1]$, respectiv $[AB]$ şi $[A_1B_1]$ sunt concurente, unde B_1, A_1 şi C_1 sunt mijloacele segmentelor $[B_aB_c]$; $[A_bA_c]$ şi $[C_aC_b]$.*

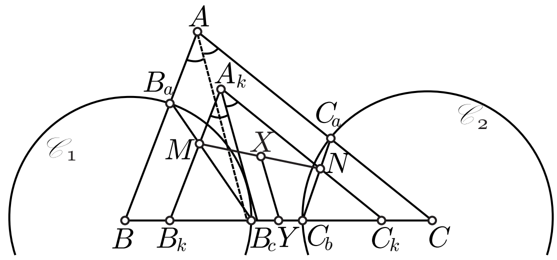


Demonstraţie. Aplicăm Problema 1 de trei ori, obţinând că dreptele în cauză sunt paralelele duse prin mijloacele laturilor la bisectoarele $\triangle ABC$, adică bisectoarele triunghiului median corespunzător $\triangle ABC$. Aşadar, concurenţa are loc în centrul cercului înscris triunghiului median, numit şi centrul lui *Spieker* asociat triunghiului [3].

□

În rezultatul următor vom demonstra că în Problema 1 concluzia rămâne aceeaşi, dacă în loc de mijloacele M şi N alegem punctele X şi Y, care împart segmentele (B_cB_a) şi (C_bC_a) în acelaşi raport.

Problema 2. *Fie $\triangle ABC$ şi $\mathcal{C}(B;r) \cap BC = \{B_c\}$, $\mathcal{C}(B;r) \cap BA = \{B_a\}$, $\mathcal{C}(C;r) \cap BC = \{C_b\}$ şi $\mathcal{C}(C;r) \cap CA = \{C_a\}$. Punctele $M \in (B_cB_a)$ şi $N \in (C_aC_b)$ împart segmentele în acelaşi raport $k = \dfrac{MB_a}{MB_c} = \dfrac{NC_a}{NC_b}$. Atunci dreapta determinată de mijloacele segmentelor (MN) şi (B_cC_b) coincide sau este paralelă cu bisectoarea $\sphericalangle BAC$.*



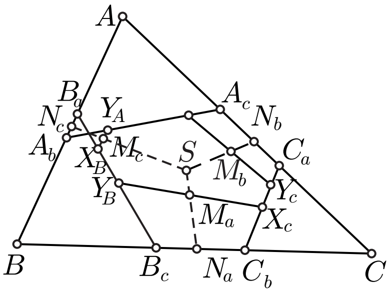
Demonstraţie. Construim din nou paralelele prin M şi N la laturile (AB) şi (AC), obţinând $\triangle A_kB_kC_k$. Deoarece mijlocul segmentului (B_cC_b) coincide cu mijlocul segmentului (B_kC_k), din teorema lui *Thales* aplicată în $\triangle B_aB_cB$ şi $\triangle C_aCC_b$, bisectoarea $\sphericalangle B_kA_kC_k$ este paralelă sau coincide cu bisectoarea $\sphericalangle BAC$. Aplicând teorema bisectoarei glisante în $\triangle A_kB_kC_k$, concluzia este imediată.

Se poate formula un corolar similar Corolarului 1, care se demonstrează folosind Problema 2.

Corolarul 2. *Fie $\triangle ABC$ oarecare şi intersecţiile $\mathcal{C}(A;r) \cap AB = \{A_b\}$; $\mathcal{C}(A;r) \cap AC = \{A_c\}$; $\mathcal{C}(C;r) \cap AC = \{C_a\}$; $\mathcal{C}(C;r) \cap BC = \{C_b\}$; $\mathcal{C}(B;r) \cap BC = \{B_c\}$, $\mathcal{C}(B;r) \cap BA = \{B_a\}$. Fie $X_B, Y_B \in (B_cB_a)$, $X_C, Y_C \in (C_bC_a)$ şi $X_A, Y_A \in (A_cA_b)$ încât $\dfrac{B_aX_B}{X_BB_c} = \dfrac{A_bY_A}{Y_AA_b} = k_1$; $\dfrac{B_cY_B}{Y_BB_a} = \dfrac{C_bX_c}{X_cC_a} = k_2$ şi $\dfrac{C_aY_c}{Y_cC_b} = \dfrac{A_cX_A}{X_AA_b} = k_3$, $k_i \in \mathbb{R}_+^*$, $i = \overline{1,3}$.*

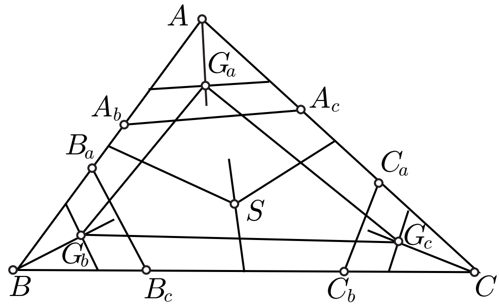
În aceste condiţii, dreptele determinate de mijloacele segmentelor (B_cC_b) cu (X_CY_B); (C_aA_c) cu (X_AY_C), respectiv (A_bB_a) cu (X_BY_A) sunt concurente în centrul cercului înscris în triunghiul median asociat $\triangle ABC$.

Demonstraţie. Aplicăm Problema 2 de trei ori, obţinând paralelismul dreptelor M_aN_b cu M_cN_c cu bisectoarele $\triangle ABC$ din A, B, respectiv C. La fel ca în cazul Corolarului 1, concluzia este evidentă.



În enunţul următor vom considera centrele de greutate ale $\triangle AA_bA_c$, $\triangle BB_aB_c$ şi $\triangle CC_aC_b$. Obţinem aşadar două triunghiuri cu dreptele determinate de mijloacele laturilor concurente.

Problema 3. *În $\triangle ABC$ efectuăm construcţiile din Corolarul 1. Notăm centrele de greutate ale $\triangle AA_bA_c$, $\triangle BB_aB_c$, $\triangle CC_aC_b$ cu G_a, G_b, respectiv G_c. Dreapta determinată de mijlocul lui (BC) cu mijlocul lui (G_bG_c) şi dreptele analoage pentru laturile (AC) şi (AB) sunt concurente.*



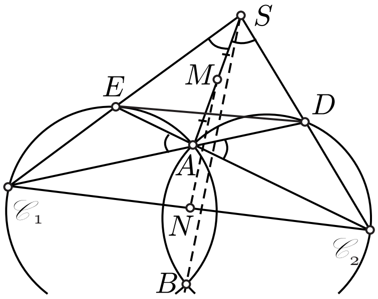
Demonstraţie. Dacă ducem paralele prin G_a la A_bA_c, prin G_c la C_aC_b, prin G_b la B_aB_c, suntem în situaţia Corolarului 1.

Observaţie. Concluzia nu se schimbă dacă pe mediatoarele segmentelor (B_aB_c), (C_aC_b) şi (A_bA_c) se consideră puncte care le împart pe acestea în acelaşi raport. Rămâne deschisă caracterizarea perechilor de triunghiuri cu drepte determinate de mijloacele laturilor concurente.

Suprapunând sau folosind alte proprietăţi împreună cu teorema bisectoarei glisante se pot obţine aplicaţii interesante. Prezentăm câteva aplicaţii cu demonstraţie şi restul vor rămâne ca temă.

Problema 4. *Fie $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ două cercuri secante congruente, $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 = \{A; B\}$. Două drepte concurente în A taie $\mathcal{C}_1$ în C şi E, iar $\mathcal{C}_2$ în D şi F, E, A, F coliniare. Fie $\{S\} = CE \cap DF$, iar M şi N mijloacele segmentelor (SA) şi (CF). Atunci SB este paralelă cu MN.*

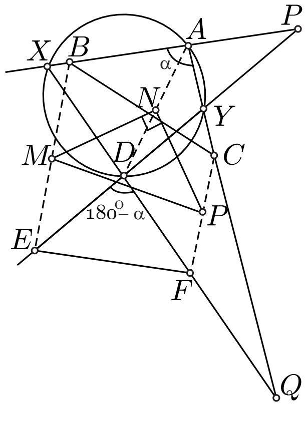
Demonstraţie. Deoarece $\sphericalangle CAE \equiv \sphericalangle DAF$ (unghiuri opuse la vârf), coardele (CE) şi (DP) sunt congruente, fiind opuse unor unghiuri congruente în cercuri congruente. Pe de altă parte, MN taie segmentul (EF) în mijlocul acestuia, MN fiind dreapta *Newton-Gauss* în patrulaterul $SEAD$. Acum, în $\triangle SCF$, MN este paralelă cu bisectoarea $\sphericalangle CSF$ din teorema bisectoarei glisante. Mai rămâne să arătăm că $(SB$ e chiar bisectoarea unghiului CSF. Acest lucru este cunoscut, deoarece B este punctul lui *Miquel* pentru patrulaterul $SEAD$, iar $\mathcal{C}_1 \equiv \mathcal{C}_2 \Leftrightarrow (SB$ bisectoarea unghiului $\sphericalangle ESD$.

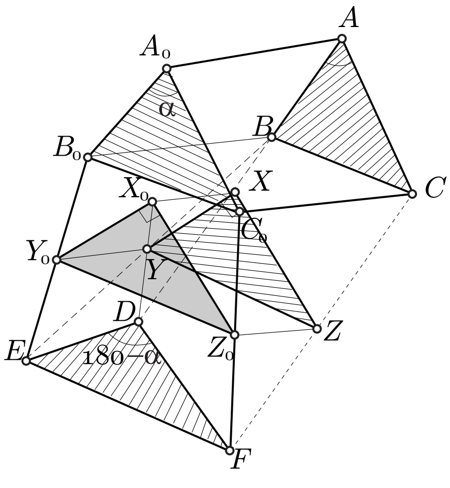


Problema 5. *Fie $\triangle ABC$ şi $\triangle DEF$ situate în acelaşi plan sau în plane paralele, având $AB = DE$, $(AC) \equiv (DF)$ şi* $\mathrm{m}(\sphericalangle CAB) + \mathrm{m}(\sphericalangle EDF) = 180°$. *Atunci triunghiul determinat de mijloacele segmentelor (BE), (AD) şi (CF) este dreptunghic.*

Demonstraţie. Vom rezolva problema pentru cazul în care triunghiurile sunt situate în acelaşi plan. Fie X şi Y intersecţiile lui FD cu AB şi ED cu AC. Din ipoteză obţinem că patrulaterul $ATDX$ este inscriptibil. Mai notăm $DY \cap AB = \{P\}$ şi $AC \cap DX = \{Q\}$.

Este cunoscută proprietatea că bisectoarele $\sphericalangle APY$ şi $\sphericalangle AQX$ sunt perpendiculare. Acum, aplicând teorema bisectoarei glisante în $\triangle ADP$, avem că MN e paralelă cu bisectoarea $\sphericalangle APY$ şi analog în $\triangle ADQ$ avem că PN e paralelă cu bisectoarea $\sphericalangle AQX$, aşadar are loc concluzia.



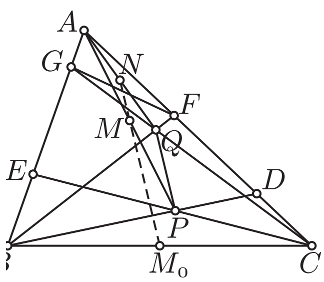


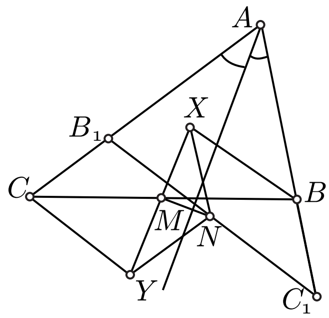
Acum vom arăta că are loc concluzia şi în cazul în care cele două triunghiuri sunt situate în plane paralele. Construim $\triangle ABC \equiv \triangle A_0B_0C_0$, translatatul $\triangle ABC$ în planul triunghiului $\triangle DEF$, altfel spus $ABCA_0B_0C_0$ va fi o prismă triunghiulară cu baza în planul (DEF). Dacă notăm cu X, Y, Z, X_0, Y_0, Z_0 mijloacele segmentelor (AD), (BE),(DF), (A_0D), (B_0E), (D_0F), poliedrul $XYZX_0Y_0Z_0$ este o prismă triunghiulară de baze $\triangle XYZ$ şi $\triangle X_0Y_0Z_0$, deoarece segmentele (XX_0), (YY_0), (ZZ_0), $(AA_0)/2$, $(BB_0)/2$, $(CC_0)/2$ sunt paralele şi congruente.

Rezultă că $\triangle XYZ$ este dreptunghic în X, deci $\triangle X_0Y_0Z_0$ este dreptunghic în X_0.

Problema 6. *Fie $\triangle ABC$ şi $D, F \in (AC)$, $E, G \in (AB)$ cu $CD = BE$ şi $CF = BG$. Dacă $BD \cap CE = \{P\}$ şi $BF \cap CG = \{Q\}$, atunci PQ este paralelă cu bisectoarea $\sphericalangle BAC$.*

Demonstraţie. Fie M şi N mijloacele $[AQ]$ şi $[AP]$. Segmentul $[MN]$ e linie mijlocie în $\triangle APQ$, aşadar $MN \| PQ$. Considerăm mijlocul lui (BC) notat cu M_0. Pentru patrulaterul $AGQF$, M_0M este dreapta *Newton-Gauss*, deci conţine şi mijlocul lui FG. Aplicând teorema bisectoarei glisante obţinem paralelismul lui M_0M cu bisectoarea unghiului $\sphericalangle BAC$. În mod asemănător se obţine că M_0N este paralelă cu bisectoarea unghiului BAC. Din unicitatea perpendicularei obţinem concluzia.





Problema 7. (Teorema bisectoarei glisante exterioare) *Fie $\triangle ABC$ şi $C_1 \in AB$, $B \in (AC_1)$, $B_1 \in (AC)$ astfel încât $BC_1 = CB_1$. În aceste condiţii dreapta determinată de mijloacele segmentelor (BC) şi (B_1C_1) este paralelă cu bisectoarea exterioară din vârful A a triunghiului ABC.*

Demonstraţie. Construim paralelogramele C_1BXN şi CB_1NY. Rezultă că $(NX) \equiv (C_1B) \equiv (CB_1) \equiv (NY)$, deci $\triangle NXY$ este isoscel cu baza (XY). Din faptul că segmentele (BX) (NC_1), (NB_1), (CY) sunt congruente şi paralele, reiese că $BXCY$ este paralelogram de centru M, aşadar punctele X, M şi Y sunt coliniare. Acum în $\triangle NXY$ isoscel, (NM) este mediana corespunzătoare bazei, prin urmare $(NM$ este bisectoarea $\sphericalangle YNX$.

Din paralelismul laturilor unghiurilor $\sphericalangle XNY$ şi $\sphericalangle BAC$ şi din faptul că semidreptele $(NY$, $(AC$ au aceeaşi orientare, iar semidreptele $(NX$, $(AB$ au orientări opuse, obţinem concluzia.

Lăsăm plăcerea cititorului să folosească aceste aplicaţii în rezolvarea următoarelor probleme, compuse de primul autor al acestei lecţii.

1. Fie $\triangle ABC$ şi punctele $B_i \in (CA)$, $C_i \in (BA)$, $i = \overline{1,3}$ astfel încât $BC_i = CB_i$, $i = \overline{1,3}$. Notăm $\{X_i\} = BB_i \cap CC_i$, $i = \overline{1,3}$. Demonstraţi că X_1, X_2, X_3 sunt coliniare. Notăm cu d_a dreapta X_1X_2. Definim analog dreptele d_b şi d_c. Demonstraţi că dreptele d_a, d_b şi d_c sunt concurente.

2. Fie $\triangle ABC$ şi considerăm $B_i \in (CA)$, $C_i \in (AB$, $i = \overline{1,3}$, $B \in (AC_i)$ astfel încât $(CB_i) \equiv (BC_i)$, $i = \overline{1,3}$. Notăm intersecţiile $CC_i \cap BB_i = \{Y_i\}$, $i = \overline{1,3}$. În aceste condiţii are loc coliniaritatea:

a) mijloacelor segmentelor (B_iC_i);

b) punctelor Y_1, Y_2, Y_3.

3. În triunghiul ABC, $F, D \in (AC$, $E, G \in AB$ astfel încât $CD = BG$, $CF = BE$ iar $C \in (DF)$, $B \in (EG)$. Demonstraţi că dreapta determinată de mijloacele segmentelor $[EF]$ şi $[DG]$ trece prin mijlocul lui (BC).

4. Dacă în $\triangle ABC$, $B_1 \in (AC)$, $C_1 \in (AB$, $B \in (AC_1)$, $M \in (BC)$, $N \in (B_1C_1)$ astfel încât $\dfrac{BC_1}{CB_1} = \dfrac{BM}{MC} = \dfrac{C_1N}{NB_1} = k > 0$, $k \in \mathbb{R}^*$, atunci dreapta MN este perpendiculară pe bisectoarea unghiului $\sphericalangle BAC$.

5. Considerăm pe laturile $\triangle ABC$ punctele mobile $M \in (BA$, $N \in (CA$, $P \in (AB$, $B \in (AP)$ astfel încât $MB = BP = CN$.

Demonstraţi că cercurile având ca diametre segmentele determinate de mijloacele segmentelor (MN) şi (NP) trec printr-un punct fix.

6. Fie $ABCD$ un patrulater convex cu $\sphericalangle ADC \equiv \sphericalangle ABC$, iar $Q \in (AD)$, $B \in (AM)$, $N \in (BC)$, $D \in (CP)$ astfel încât $BM = DQ$, $BN = PD$. Arătaţi că mijloacele segmentelor (MQ), (BD), (PN) sunt coliniare.

7. Se consideră patrulaterul inscriptibil $ABCD$ şi notăm cu $M \in (BC$, $N \in (DA$, $P \in (DC$ şi $Q \in (AB$ astfel încât $BM = AN$, $DP = AQ$. Dacă notăm cu X, Y, Z, T mijloacele segmentelor (PQ), (AD), (MN) şi (AB), atunci $XYZT$ este trapez.

8. Considerăm $\triangle ABC$, $B_i \in AC$, $i = \overline{1,2}$, $C \in (B_1B_2)$, $B_1 \in (AC)$, $C_i \in (AB)$, $i = \overline{1,2}$, $B \in (C_1C_2)$, $C_2 \in (AB)$ cu $\dfrac{B_iC}{BC_i} = \dfrac{BM}{MC} = k \in \mathbb{R}_+^*$, $M \in (BC)$, iar $\dfrac{C_1N}{NB_1} = k = \dfrac{C_2P}{PB_2}$, $N \in (C_1B_1)$, $P \in (C_2B_2)$. Punctele M, N, P sunt coliniare?

9. În $\triangle ABC$ considerăm $M \in (AB)$, $N \in (AC$, $C \in (AN)$ cu $BM = CN$ şi notăm cu d_a^* dreapta determinată de mijloacele segmentelor (BC) şi (MN). Analog construim d_b^* şi d_c^*, $d_a^* \cap d_b^* = \{C_1\}$, $d_b^* \cap d_c^* = \{A_1\}$ şi $d_c^* \cap d_a^* = \{B_1\}$. Demonstraţi că perpendicularele din A_1 pe BC, din B_1 pe AC şi din C_1 pe AB sunt concurente.

10. Fie $ABCD$ un patrulater. Cercuri congruente cu centrele în B, C şi D intersectează BA, BC, BD; CA, CB, CD, respectiv DA, DB, DC în punctele M_a, M_d, M_c; N_a, N_b, N_d respectiv P_a, P_b, P_c. Centrele de greutate ale triunghiurilor $M_aM_bM_c$, $N_aN_bN_d$ respectiv $P_aP_bP_c$ notate cu G_b, G_c, G_d formează un triunghi al cărui centru de greutate este G^*. Dacă J este punctul de intersecţie a cevienelor din $\triangle BCD$, determinate de vârfurile B, C şi D cu picioarele bisectoarelor unghiurilor $\sphericalangle BAC$, $\sphericalangle CAD$ şi $\sphericalangle DAB$ în $\triangle BAC$, $\triangle CAD$ şi $\triangle DAB$, demonstraţi că dreapta AJ e paralelă cu GG^* sau coincide cu GG^*, G fiind centrul de greutate al $\triangle BCD$.

11. Fie $ABCD$ si $EFGH$ paralelograme congruente situate în plane paralele astfel încât $AB = EF$, $BC = FG$, unghiurile $\sphericalangle BAD$ şi $\sphericalangle FEH$ sunt congruente, segmentele $[AF]$ si $[BH]$ sunt de o parte şi de alta a planului (OEG), iar segmentele (DE) si (CG) sunt de o parte şi de alta a planului (OHF), cu O centrul paralelogramului $ABCD$. Dacă notăm cu T, U, V, W mijloacele segmentelor (AE), (BG), (CH), (DF), demonstraţi că patrulaterul $TUVW$ este inscriptibil.

Bibliografie

[1] P. Braica, *Extinderi spaţiale pentru teorema bisectoarei glisante*, RMT **2** (2015), 3–6.
[2] P. Braica, *O problemă de construcţie*, RMT, no. 3 (2015).
[3] D. Brânzei, *Bazele raţionamentului geometric*, Ed. Acad. R.S.R, Bucureşti, 1983.
[4] A. Eckstein, *În legătură cu teorema bisectoarei glisante*, RMT **3** (2014), 11–16.
[5] G.M. Seria B