PROBLEME PENTRU EXAMENE NAŢIONALE[1)]

Clasa a VII-a

1. Se dau numerele $a = \dfrac{3}{4}$ şi $b = \dfrac{1}{27}$. Calculaţi media geometrică a celor două numere.

2. Dacă $a\sqrt{2} = \sqrt{72}$ şi $\sqrt{b} = 5\sqrt{3}$, aflaţi $a + b$.

3. Comparaţi numerele $x = \dfrac{1}{\sqrt{8} - \sqrt{7}}$ şi $y = \sqrt{8} + \sqrt{7}$.

4. Calculaţi $\dfrac{1}{\sqrt{7} - \sqrt{6}} - \sqrt{6}$.

5. Fie ABC un triunghi şi MNP triunghiul format de mijloacele laturilor AB, BC, respectiv AC. Dacă $\mathcal{A}_{\triangle MNP} = 4$ cm^2, aflaţi aria triunghiului ABC.

6. În triunghiul ABC, B_1, B_2, $B_3 \in [AB]$ şi C_1, C_2, $C_3 \in [AC]$ astfel încât $AB_1 = B_1B_2 = B_2B_3 = B_3B$ şi $AC_1 = C_1C_2 = C_2C_3 = C_3C$. Dacă $BC = 24$ cm, aflaţi lungimile segmentelor B_1C_1, B_2C_2, B_3C_3.

Clasa a VIII-a

7. Verificaţi dacă $x^4 + x^2 + 1 = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$

8. Fie x un număr real nenul. Dacă $x^2 + \dfrac{1}{x^2} = 18$, calculaţi $x - \dfrac{1}{x}$.

9. Fie a un număr real astfel încât $a^3 + a = 3$.
Calculaţi $a^6 + 2a^4 + 2a^3 + a^2 + 2a + 1$.

10. Lungimea apotemei unei piramide patrulatere regulate este egală cu muchia bazei. Calculaţi măsura unghiului format de o faţă laterală cu planul bazei.

11. Într-un paralelipiped dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ proiecţiile diagonalei AC' pe planele celor trei feţe care conţin punctul A sunt congruente. Să se demonstreze că $ABCDA'B'C'D'$ este cub.

12. Într-un paralelipiped dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ diagonala AC' formează cu planele feţelor care conţin punctul C' unghiuri congruente. Să se arate că $ABCDA'B'C'D'$ este cub.

Clasa a IX-a

13. Să se arate că

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1},\ n \geq 1.$$

14. Să se determine exponentul lui 2 din produsul

$$(n+1)(n+2) \cdot \ldots \cdot (n+n),\ n \in \mathbb{N}^*.$$

[1)] La problemele din această rubrică nu se primesc soluţii. (N.R.)

15. Să se arate că $\left(1+\frac{k}{n}\right)^n \leq 1+\frac{k}{n}+\frac{k}{n^2}$, oricare ar fi $0 \leq k \leq n$ numere naturale.

16. Să se arate că $\frac{1}{1}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^3}+\ldots+\frac{1}{n^n} < 2$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.

17. Punctele M, N, P verifică $\overrightarrow{MP}+2\overrightarrow{PN}=5\overrightarrow{NM}$.

Să se calculeze $\frac{PN}{NM}$.

18. Fie $ABCD$ un trapez cu bazele AB şi CD şi O intersecţia diagonalelor AC şi BD. Să se descompună vectorul $\overrightarrow{AO}$ după direcţiile vectorilor $\overrightarrow{CD}$ şi $\overrightarrow{BC}$ ştiind că $AB=10$, $BC=7$, $CD=5$ şi $DA=6$.

Clasa a X-a

19. Fie z un număr complex cu $|z|=|z-1|=1$. Să se calculeze $z+\overline{z}$.

20. Fie $z=\cos 20^\circ + \mathrm{i}\sin 20^\circ$. Să se calculeze $1+z^2+z^4+\ldots+z^{16}$.

21. Să se determine numerele complexe z care verifică $|z+2|=|3z-1|$ şi $|z|=1$.

22. Fie $a,b \in \mathbb{C}$ cu $|a|=|b|=1$ şi $ab \neq 1$. Să se arate că

$$\operatorname{Re}\left(\frac{a+b}{1-ab}\right)=0.$$

23. Fie $u,v \in \mathbb{C}$ cu $|u|=|v|=1$ şi $uv \neq -1$. Să se arate că $\frac{u+v}{1+uv} \in \mathbb{R}$.

24. Să se afle numărul elementelor mulţimii $\{ab \mid a \in U_3,\ b \in U_5\}$, unde $U_n=\{x \in \mathbb{C} \mid x^n=1\}$.

Clasa a XI-a

25. Fie matricea $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Calculaţi $\det(A)$. b) Calculaţi A^{2015}.

c) Determinaţi o matrice nenulă $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ astfel încât $AX=O_3$.

26. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^4-12x^2+5$.

a) Determinaţi punctele de extrem ale funcţiei f.

b) Calculaţi $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{f(x)}-x^2\right)$.

c) Determinaţi punctele de inflexiune ale funcţiei f.

Clasa a XII-a

27. Se consideră polinomul $f=2X^3-3X^2+7X+a$, unde $a\in\mathbb{R}$.

a) Determinaţi rădăcinile lui f, ştiind că $a=-6$.

b) Determinaţi valorile lui a pentru care $(x_1-1)(x_2-1)(x_3-1)=4$, unde $x_1,x_2,x_3 \in \mathbb{C}$ sunt rădăcinile lui f.

c) Să se arate că pentru orice $a \in \mathbb{R}$, rădăcinile lui f sunt distincte.

28. Se consideră funcţia $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{x\,(x^2 + 2)}$.

a) Calculaţi $\displaystyle\int_1^2 x f(x)\mathrm{d}x$. b) Calculaţi $\displaystyle\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x$.

a) Calculaţi $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \int_1^x f(t)\mathrm{d}t$.