PENTRU CERCURILE DE ELEVI

O CLASĂ DE ECUAŢII EXPONENŢIALE

Traian Tămâian[1)]

În această lecţie vor fi prezentate ecuaţii exponenţiale a căror metodă de rezolvare constă în intuirea soluţiei şi apoi demonstrarea unicităţii ei.

Vom surprinde într-o schemă generală mai multe probleme cu rezolvări asemănătoare, multe dintre ele fiind publicate în reviste de matematică sau regăsindu-se printre subiectele date la olimpiade şi concursuri şcolare.

Rezultatele principale sunt conţinute în următoarele propoziţii.

Propoziţia 1. *Dacă $a, b > 1$ sunt arbitrar fixate şi $f : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to (1, \infty)$ este o funcţie arbitrară atunci ecuaţia*

$$a^x b^{\frac{1}{x}} + b^x a^{\frac{1}{x}} + f^{x+\frac{1}{x}}(a, b) = 2ab + f^2(a, b)$$

are în mulţimea numerelor reale nenule soluţia unică $x = 1$.

Demonstraţie. Se observă că $x = 1$ este soluţie a ecuaţiei. Vom demonstra unicitatea ei.

Dacă $x < 0$ atunci

$$a^x b^{\frac{1}{x}} + b^x a^{\frac{1}{x}} + f^{x+\frac{1}{x}}(a, b) < 1 + 1 + 1 = 2 + 1 < 2ab + f^2(a, b),$$

deci ecuaţia nu are soluţii în mulţimea $(-\infty, 0)$.

Dacă $x \in (0, \infty)\setminus\{1\}$, aplicând inegalitatea mediilor şi ţinând cont că $x + \frac{1}{x} > 2$ avem

$$a^x b^{\frac{1}{x}} + b^x a^{\frac{1}{x}} + f^{x+\frac{1}{x}}(a, b) \geq 2\sqrt{a^{x+\frac{1}{x}} b^{x+\frac{1}{x}}} + f^{x+\frac{1}{x}}(a, b) >$$
$$> 2\sqrt{a^2b^2} + f^2(a, b) = 2ab + f^2(a, b),$$

deci ecuaţia nu are soluţii în mulţimea $(0, \infty)\setminus\{1\}$.

În concluzie unica soluţie a ecuaţiei date este $x = 1$.

Propoziţia 2. *Dacă $a, b > 1$ sunt arbitrar fixate şi $u : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to (1, \infty)$ este o funcţie arbitrară, atunci ecuaţia*

$$[a^x + b^{\frac{1}{x}} + u^{x+\frac{1}{x}}(a, b)] \cdot [b^x + a^{\frac{1}{x}} + u^{x+\frac{1}{x}}(a, b)] = (a + b + u^2(a, b))^2$$

are în mulţimea numerelor reale nenule soluţia unică $x = 1$.

Demonstraţie. Se observă că $x = 1$ este soluţie a ecuaţiei. Vom demonstra unicitatea ei.

Dacă $x < 0$ atunci

$$[a^x + b^{\frac{1}{x}} + u^{x+\frac{1}{x}}(a, b)][b^x + a^{\frac{1}{x}} + u^{x+\frac{1}{x}}(a, b)] < (1 + 1 + 1)(1 + 1 + 1) = 3^2$$
$$< (a + b + u^2(a, b))^2,$$

deci ecuaţia nu are soluţii în mulţimea $(-\infty, 0)$.

[1)]Profesor, Liceul Teoretic Carei

Dacă $x \in (0,\infty)\backslash\{1\}$, ecuaţia se scrie echivalent

$$(ab)^x + a^{x+\frac{1}{x}} + b^{x+\frac{1}{x}} + (ab)^{x+\frac{1}{x}} + u^{x+\frac{1}{x}}(a,b)\cdot(a^x + a^{\frac{1}{x}} + b^x + b^{\frac{1}{x}}) + \\ + u^{2(x+\frac{1}{x})}(a,b) = (a+b+u^2(a,b))^2.$$

Deoarece pentru orice $x \in (0,\infty)\backslash\{1\}$ avem $x+\frac{1}{x} > 2$ şi

$$a^x + a^{\frac{1}{x}} + b^x + b^{\frac{1}{x}} \geqslant 2\sqrt{a^{x+\frac{1}{x}}} + 2\sqrt{b^{x+\frac{1}{x}}} > 2(a+b),$$

obţinem

$$(ab)^x + a^{x+\frac{1}{x}} + b^{x+\frac{1}{x}} + (ab)^{x+\frac{1}{x}} + u^{x+\frac{1}{x}}(a,b)(a^x + a^{\frac{1}{x}} + b^x + b^{\frac{1}{x}}) + \\ + u^{2(x+\frac{1}{x})}(a,b) > \\ > 1 + a^2 + b^2 + (ab)^2 + u^2(a,b)\cdot 2(a+b) + u^4(a,b) = \\ = (ab-1)^2 + (a+b)^2 + 2(a+b)\cdot u^2(a,b) + u^4(a,b) = \\ = (ab-1)^2 + \left(a+b+u^2(a,b)\right)^2 \geq \left(a+b+u^2(a,b)\right)^2.$$

Rezultă că ecuaţia nu are soluţii în mulţimea$(0,\infty)\backslash\{1\}$. Unica soluţie a ecuaţiei date este deci $x=1$.

Prezentăm în continuare câteva aplicaţii ale acestor propoziţii:

1. (G.M.) Dacă $a,b>1$, să se rezolve în $\mathbb{R}^*$ ecuaţia

$$a^x\cdot b^{\frac{1}{x}} + b^x\cdot a^{\frac{1}{x}} + (\sqrt{a^2+b^2})^{x+\frac{1}{x}} = (a+b)^2.$$

Soluţie. Se ia $f(a,b)=\sqrt{a^2+b^2}$.

Cum $2ab+f^2(a,b) = 2ab + a^2 + b^2 = (a+b)^2$, aplicând propoziţia 1, rezultă că unica soluţie a ecuaţiei date este $x=1$.

2. Rezolvaţi în $\mathbb{R}^*$ ecuaţia $3^x\cdot 4^{\frac{1}{x}} + 4^x\cdot 3^{\frac{1}{x}} + 5^{x+\frac{1}{x}} = 49$.

Soluţie. Este un caz particular al problemei 1, când $a=3$, $b=4$.

Unica soluţie a ecuaţiei este $x=1$.

3. (O.L. Satu Mare) Dacă $a,b>1$, să se rezolve în $\mathbb{R}^*$ ecuaţia

$$a^x\cdot b^{\frac{1}{x}} + b^x\cdot a^{\frac{1}{x}} + (\sqrt{ab})^{x+\frac{1}{x}} = 3ab.$$

Soluţie. Se ia $f(a,b)=\sqrt{ab}$.

Cum $2ab+f^2(a,b) = 2ab+(\sqrt{ab})^2 = 3ab$, aplicând propoziţia 1, rezultă că unica soluţie a ecuaţiei date este $x=1$.

4. (G.M.) Rezolvaţi în $\mathbb{R}^*$ ecuaţia $4^x\cdot 9^{\frac{1}{x}} + 9^x\cdot 4^{\frac{1}{x}} + 6^{x+\frac{1}{x}} = 108$.

Soluţie. Este un caz particular al problemei 3, când $a=4$, $b=9$.

Unica soluţie a ecuaţiei este $x=1$.

5. Dacă $a,b>1$, să se rezolve în $\mathbb{R}^*$ ecuaţia

$$[a^x + b^{\frac{1}{x}} + (\sqrt{a+b})^{x+\frac{1}{x}}]\cdot[b^x + a^{\frac{1}{x}} + (\sqrt{a+b})^{x+\frac{1}{x}}] = 4(a+b)^2.$$

Soluţie. Se ia $u(a,b)=\sqrt{a+b}$.

Cum $a+b+u^2(a,b)=2(a+b)$, aplicând propoziţia 2, rezultă că unica soluţie a ecuaţiei date este $x=1$.

6. Să se rezolve în $\mathbb{R}^*$ecuaţia:$(4^x+5^{\frac{1}{x}}+3^{x+\frac{1}{x}})\cdot(5^x+4^{\frac{1}{x}}+3^{x+\frac{1}{x}})=324$.

Soluţie. Este un caz particular al problemei 5, când $a=4$, $b=5$.

Unica soluţie a ecuaţiei este $x=1$.

7. Dacă $a,b>1$, să se rezolve în $\mathbb{R}^*$ ecuaţia

$$[a^x+b^{\frac{1}{x}}+(\sqrt[4]{4ab})^{x+\frac{1}{x}}]\cdot[b^x+a^{\frac{1}{x}}+(\sqrt[4]{4ab})^{x+\frac{1}{x}}]=(\sqrt{a}+\sqrt{b})^4.$$

Soluţie. Se ia $u(a,b)=\sqrt[4]{4ab}$.

Cum $a+b+u^2(a,b)=(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$, aplicând propoziţia 2, rezultă că unica soluţie a ecuaţiei date este $x=1$.

8. Să se rezolve în $\mathbb{R}^*$ecuaţia

$$[4^x+9^{\frac{1}{x}}+(\sqrt{12})^{x+\frac{1}{x}}]\cdot[b^x+a^{\frac{1}{x}}+(\sqrt{12})^{x+\frac{1}{x}}]=625.$$

Soluţie. Este un caz particular al problemei 7, când $a=4$, $b=9$.

Unica soluţie a ecuaţiei este $x=1$.

BIBLIOGRAFIE

[1] Colecţia revistei „Gazeta Matematică“

[2] Colecţia revistei „R.M.T.“

[3] Traian Tămâian, *Probleme Selecte din reviste selecte*, Editura Cub Press 22, Baia Mare, 2002.