Clasa a IX-a

13. Fie a un număr real şi r un număr raţional nenul. În ipoteza că a^2 şi $(a+r)^2$ sunt numere raţionale, arătaţi că a este raţional.

14. Fie a un număr iraţional astfel încât $[a] \cdot \{a\}$ este număr raţional. Calculaţi $[a]$.

15. Fie A şi B două mulţimi finite astfel încât $A \cup B$ are 24 de elemente şi $A \cap B$ are 7 elemente. Arătaţi că numărul elementelor din A şi respectiv B sunt prime între ele.

16. Câte numere naturale de forma $\overline{abc}$ au $b^2 = ac$?

17. Câte diagonale ale poligonului convex $A_1A_2 \dots A_{2014}$ nu intersectează diagonala A_1A_8?

18. Daţi un exemplu de progresie aritmetică de numere naturale care nu conţine niciun pătrat perfect, iar $\frac{1}{2}S_n$ este pătrat perfect pentru orice număr natural nenul n.

Clasa a X-a

19. Comparaţi numerele $a = \sqrt{99} + \sqrt{101}$ şi $b = \sqrt{98} + \sqrt{102}$.

20. Arătaţi că există un număr iraţional a pentru care $a^4 - 4a$ este număr raţional.

21. Demonstraţi că $\sqrt[3]{3} \geq \sqrt[n]{n}$, oricare ar fi $n \geq 2$ întreg.

22. Ordonaţi crescător numerele $0,1^{0,1}$, $0,2^{0,2}$ şi $0,3^{0,3}$.

23. Calculaţi valoarea expresiei $x^3 + 6x^2 + 12x + 1$ pentru $x = \sqrt[3]{3} - 2$.

24. Demonstraţi că $\sqrt[4]{49 + 20\sqrt{6}} + \sqrt[4]{49 - 20\sqrt{6}} = 2\sqrt{3}$.

Clasa a XI-a

25. Pentru fiecare număr real m considerăm matricea

$$A(m) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -m & m & -2 \end{pmatrix}.$$

a) Calculaţi $\det A(m)$, $m \in \mathbb{R}$.

b) Arătaţi că pentru orice $m \in \mathbb{R}$, suma elementelor matricei

$$B = A(1) + A(2) + \ldots + A(m)$$

este egală cu $-m$.

c) Calculaţi determinantul adjunctei matricei $A(m)$.

26. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^2}{x-2}$.

a) Determinaţi ecuaţia asimptotei spre ∞ la graficul lui f.

b) Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{f(x)}{x}\right)^{\ln x}$.

c) Arătaţi că f este convexă pe $(2,\infty)$.

Clasa a XII-a

27. Se consideră polinomul $f = X^3 - 3X^2 + 3X + a$, unde a este un număr real nenul şi $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$ rădăcinile lui.

a) Calculaţi $\left(1-\dfrac{1}{x_1}\right)\left(1-\dfrac{1}{x_2}\right)\left(1-\dfrac{1}{x_3}\right)$.

b) Pentru $a = 5$, arătaţi că f are cel puţin o rădăcină iraţională.

c) Determinaţi valorile reale ale lui a pentru care f are toate rădăcinile reale.

28. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + x + 1$.

a) Arătaţi că $\displaystyle\int_0^1 \frac{2x+1}{f(x)}\mathrm{d}x = \ln 3$.

b) Calculaţi $\displaystyle\int_0^1 \frac{f(x)}{x+1}\mathrm{d}x$.

c) Calculaţi $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{x^n}{f(x)}\mathrm{d}x$.