PROBLEME PENTRU EXAMENE NAŢIONALE[1]

Prezentăm mai jos un model pentru proba de matematică a Evaluării Naţionale a elevilor din clasa a VIII-a.

SUBIECTUL I

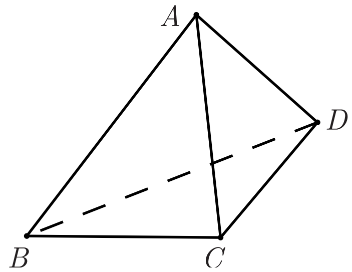
1. Rezultatul calculului $(1+2\cdot 4):3$ este egal cu ...

2. Probabilitatea ca aruncând un zar să obţinem pe faţa de sus un număr par este egală cu ...

3. Soluţia inecuaţiei $2-3x\leq 8$ este ...

4. Complementul unghiului cu măsura de 60° este unghiul cu măsura de ...$^\circ$

5. În figura următoare este desenat un tetraedru regulat $ABCD$. Dacă $AB=12$ cm, atunci perimetrul triunghiului ACD este egal cu ... cm



6. Lotul echipei de fotbal a şcolii este format din 12 elevi. Numărul lor şi vârstele corespunzătoare sunt înscrise în tabelul de mai jos

Vârstă (ani)	10	11	12	13	14
Număr elevi	2	3	4	2	1

Media aritmetică a vârstelor elevilor din echipa de fotbal este egală cu ...

SUBIECTUL al II-lea

7. Desenaţi, pe foaia de examen, o prismă triunghiulară regulată dreaptă şi notaţi-o $ABCA'B'C'$.

8. O persoană are o sumă S de bani. În prima zi cheltuieşte 30 % din suma S, a doua zi cheltuieşte 40 % din suma S, iar a treia zi cheltuieşte $\frac{1}{4}$ din suma S. Ştiind că persoanei îi rămân 600 de lei, aflaţi cât a cheltuit în prima zi.

9. Calculaţi $E=1+\dfrac{\sqrt{3}-3}{2}-\dfrac{1}{\sqrt{3}+1}$

10. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax+b$, unde a şi b sunt numere reale.

[1] La problemele din această rubrică nu se primesc soluţii. (N.R.)

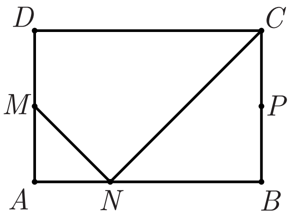
a) Arătaţi că $f(1) + f(4) = f(2) + f(3)$.

b) Pentru $a = 2$ şi $b = -4$, reprezentaţi grafic funcţia f într-un sistem de axe ortogonale xOy.

11. Fie expresia $E(x) = (x+3)^2 + 2(x-4)(x+3) + (x-4)^2$. Arătaţi că $E(x) = (2x-1)^2$.

SUBIECTUL al III-lea

12. În figura următoare este schiţa unei mese de biliard sub forma dreptunghiului $ABCD$, în care $AB = 18$ dm şi $AD = 12$ dm.



a) Aflaţi aria dreptunghiului $ABCD$.

b) Dacă P este mijlocul lui $[BC]$ aflaţi perimetrul triunghiului ADP.

c) Din punctul M, mijlocul lui $[AD]$ este lansată o bilă care atinge latura AB în N şi apoi ajunge în C. Ştiind că $\sphericalangle ANM \equiv \sphericalangle CNB$, arătaţi că $m(\sphericalangle MNC) = 90°$.

13. Fie $VABCD$ o piramidă patrulateră regulată cu baza $ABCD$. Latura bazei este egală cu $12\sqrt{3}$ cm şi apotema piramidei este egală cu 12 cm.

a) Calculaţi volumul piramidei.

b) Calculaţi măsura unghiului determinat de planul unei feţe laterale cu planul bazei.

c) La ce distanţă de A trebuie luat un punct $P \in (AV)$ astfel încât aria triunghiului PBD să fie minimă?

Clasa a IX-a

14. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 3x + 2$. Rezolvaţi ecuaţia

$$(f \circ f)(x) = 2, \quad x \in \mathbb{R}.$$

15. Se consideră funcţia $f : \left[\frac{1}{2}, \infty\right) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - \{x\}$. Arătaţi că f este funcţie crescătoare.

16. Fie x_1 şi x_2 soluţiile ecuaţiei $x^2 - 5x + 2 = 0$. Arătaţi că pentru orice număr natural n, numărul $x_1^n + x_2^n$ este natural.

17. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + ax + b$ cu a, b numere raţionale. Arătaţi că există o infinitate de numere iraţionale α cu proprietatea că $f(\alpha)$ este număr raţional.

18. Rezolvaţi sistemul

$$\begin{cases} x^2+3xy+y^2=5 \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=2 \end{cases}, \qquad x,y\in\mathbb{R}.$$

Clasa a X-a

19. Fie mulţimea $A=\left\{z\in\mathbb{C}\;\middle|\;|z-1-\mathrm{i}|\le 1 \text{ şi } \arg z\in\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]\right\}$. Determinaţi maximul mulţimii $\{|z| \mid z\in A\}$.

20. Determinaţi $z\in\mathbb{C}^*$ ştiind că punctul de afix 1 este mijlocul segmentului cu capetele în punctele de afixe $2z$ şi $\dfrac{2}{z}$.

21. Câte funcţii injective $f:\{1,2,3,4\}\to\{1,2,3,4,5\}$ cu $f(1)\le 3$ şi $f(2)\ge 3$ există?

22. Arătaţi că are loc egalitatea $C_5^3+C_6^3+C_7^3+C_8^3+C_5^4=C_9^4$.

23. Câte numere naturale de patru cifre au exact trei cifre impare?

Clasa a XI-a

24. Pentru fiecare $x\in\mathbb{R}$ se consideră matricea

$$A(x)=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3+x & 4+x \\ 3 & 4+x & 5+x \end{pmatrix}.$$

a) Calculaţi $\det A(0)$.

b) Determinaţi valorile reale ale lui x pentru care matricea $A(x)$ este inversabilă.

c) Arătaţi că pentru orice valoare a lui x, rangul matricei $A(x)$ este cel puţin 2.

25. Fie $f:(-1,0)\cup(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{\ln(x+1)}{x}$.

a) Determinaţi asimptotele verticale ale graficului funcţiei f.

b) Studiaţi monotonia funcţiei f.

c) Calculaţi $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x))^{\frac{1}{x}}$.

Clasa a XII-a

26. Fie polinomul $f=X^3-X^2+a$, unde a este un număr complex nenul.

a) Determinaţi valorile lui A pentru care restul împărţirii lui f la $X-a$ este egal cu 1.

b) Determinaţi valorile reale ale lui a pentru care f are toate rădăcinile reale.

c) Notăm cu $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$ rădăcinile polinomului f pentru $a = 2014$. Arătaţi că legea „ $*$ “ definită pe $\mathbb{C}$ prin $x * y = x_1xy + x_2x + x_3y + x_3$ este asociativă.

27. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 + x + 1}$. Arătaţi că:

a) $\displaystyle\int_0^1 \left(x^2 + x + 1\right) f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{4}$.

b) $\displaystyle\int_0^1 (f(x) - x + 1)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$.

c) $\displaystyle\lim_{t\to 0}\left(\frac{1}{t^4}\int_0^t f(x)\mathrm{d}x\right) = \frac{1}{4}$.

Bacalaureat olimpici, 2014