PROBLEME PROPUSE

PROBLEME PENTRU EXAMENE NAŢIONALE[1)]

Prezentăm mai jos un model pentru proba de matematică a Evaluării Naţionale a elevilor din clasa a VIII-a.

SUBIECTUL I

1. Rezultatul calculului $2 + 5 \cdot 8$ este egal cu ...

2. Simplificând fracţia $\frac{21}{24}$ se obţine fracţia ireductibilă ...

3. Se dau mulţimile $A = \{1, 3, 5\}$ şi $B = \{1, 2, 3, 4\}$. Mulţimea $A \cap B$ conţine ... elemente.

4. Un unghi are măsura egală cu $34°$. Măsura complementului său este egală cu ... °.

5. Aria unui trapez, care are linia mijlocie de 8 cm şi înălţimea de 6 cm, este egală cu ... cm^2.

6. O piramidă patrulateră regulată are toate muchiile congruente, fiecare având lungimea de 6 cm. Aria laterală a piramidei este egală cu ... cm^2.

SUBIECTUL al II-lea

7. Desenaţi un paralelipiped dreptunghic şi notaţi-l $ABCDA'B'C'D'$.

8. Calculaţi media geometrică a numerelor $a = (\sqrt{2} + 1)(\sqrt{5} - 2)$ şi $b = (\sqrt{2} - 1)(\sqrt{5} + 2)$.

9. Numerele 122, 85 şi 63 se împart la acelaşi număr natural x, diferit de zero. Se obţin resturile 2, 5, respectiv 3. Aflaţi cea mai mare valoare a lui x care îndeplineşte condiţiile problemei.

10. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = (1 - \sqrt{2})x - \sqrt{2}$.

a) Calculaţi valoarea funcţiei pentru $x = -1$.

b) Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale inecuaţia $f(x) + 1 \geq 0$.

11.) Arătaţi că numărul $\sqrt{5n + 2}$ este iraţional, pentru orice n număr natural.

SUBIECTUL al III-lea

12. În Figura 1 este reprezentat schematic un zmeu. Se ştie că $\triangle BAD$ este isoscel şi $m(\sphericalangle BAD) = 120°$, iar $\triangle BCD$ este echilateral cu $BD = 12$ dm.

a) Arătaţi că $AC = 8\sqrt{3}$ dm.

b) Calculaţi aria suprafeţei de hârtie din care este confecţionat zmeul.

c) Cât la sută din aria $\triangle BCD$ reprezintă aria $\triangle BAD$?

[1)] La problemele din această rubrică nu se primesc soluţii. (N.R.)

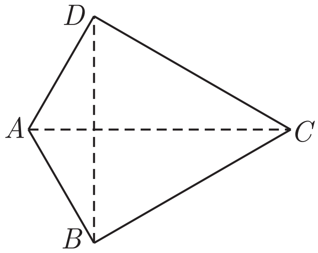

Figura 1

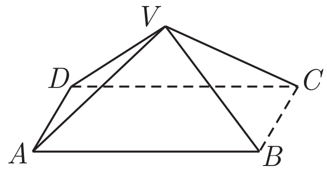

Figura 2

13. În Figura 2 este reprezentat schematic acoperişul unei clădiri, sub forma unei piramide patrulatere regulate $VABCD$. Se ştie că $AB = 6\sqrt{2}$ cm şi volumul piramidei este egal cu $144\sqrt{3}$ cm^3.

a) Arătaţi că triunghiul VAC este echilateral.

b) Calculaţi aria totală a piramidei.

c) Dacă E este un punct pe $[AV]$ astfel încât $AE = 2 \cdot VE$, calculaţi distanţa de la E la planul (VBD).

Clasa a IX-a

14. Determinaţi două numere reale care au suma şi produsul egale cu -1.

15. Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^2 - 3x + 5$. Daţi un exemplu de număr iraţional α astfel încât $f(\alpha)$ este număr raţional.

16. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - \sqrt{2}x + 1$. Determinaţi cel mai mic element al mulţimii $\{f(k) \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

17. În triunghiul ascuţitunghic ABC are loc relaţia

$$\sin B + \cos B = \sin C + \cos C.$$

Arătaţi că triunghiul ABC este isoscel.

18. Arătaţi că $\sin x + \cos x \geq 1$, oricare ar fi $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

19. Arătaţi că $\sin 15^\circ = \dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$.

Clasa a X-a

20. Determinaţi numărul funcţiilor injective $f : \{1, 2, 3\} \to \{1, 2, 3, 4, 5\}$ cu proprietatea că $f(1) \leq 3$ şi $f(2) \geq 3$.

21. Determinaţi numărul submulţimilor nevide ale mulţimii $A = \{1, 2, 4, 6, 8\}$, cu proprietatea că au suma elementelor număr impar.

22. Arătaţi că $C_5^0 C_4^3 + C_5^1 C_4^2 + C_5^2 C_4^1 + C_5^3 C_4^0 = C_9^3$.

23. Calculaţi distanţa dintre dreptele paralele de ecuaţii $x + 5y - 6 = 0$ şi $2x + 10y - 1 = 0$.

24. Determinaţi numerele reale m astfel încât distanţa de la punctul $A(m, m+1)$ la dreapta de ecuaţie $3x-4y-1=0$ să fie egală cu 1.

25. Arătaţi că dreptele de ecuaţii $3x-y-5=0$ şi $3x+y-5=0$ sunt simetrice faţă de axa Ox.

Clasa a XI-a

26. Se consideră mulţimea de matrice

$$M=\left\{\left.\begin{pmatrix}1 & a & b\\ 0 & 1 & a\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right| a,b\in\mathbb{C}\right\}.$$

a) Arătaţi că $(X-I_3)^3=O_3$, oricare ar fi $X\in M$.
b) Determinaţi matricele $X\in M$ cu proprietatea că $X=X^{-1}$.
c) Calculaţi $\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}^{2014}$.

27. Se comsideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\operatorname{arctg}x-\ln\left(1+x^2\right)+5$.
a) Arătaţi că f este funcţie convexă.
b) Determinaţi punctele de extrem ale funcţiei f.
c)Arătaţi că $f(x)\geq 5$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$.

Clasa a XII-a

28. Se consideră polinomul $f=\left(X^2+X+1\right)^{2014}-\left(X^2-X+1\right)^{2014}$.
a) Determinaţi restul împărţirii lui f la polinomul X^2-1.
b) Determinaţi coeficientul lui X^{1315} din forma algebrică a polinomului dat f.
c) Fie $c\in\mathbb{R}[X]$ câtul împărţirii lui f la polinomul X^2-1. Calculaţi $c(1)$.

29. Pentru fiecare $n\in\mathbb{N}^*$ se notează $I_n=\int\limits_0^1 x^n\operatorname{arctg}x\,\mathrm{d}x$.

a) Calculaţi I_1. b) Arătaţi că $I_2\leq\dfrac{\pi}{12}$. c) Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty} nI_n$.

PROBLEME PENTRU CICLUL PRIMAR[1)]

P:678. În urma unui concurs toţi participanţii au fost recompensaţi astfel: $\dfrac{3}{20}$ dintre ei au primit premiul I, $\dfrac{3}{10}$ din restul concurenţilor au primit premiul II, alţi 60 de elevi au primit premiul III, iar ultimii 59 au primit diplomă de participare. Câţi concurenţi au participat la concurs?

* * *

[1)] Se primesc soluţii până la 31 august 2014 (data poştei). (N.R.)