PENTRU CERCURILE DE ELEVI

PROPRIETĂŢI ALE MULŢIMILOR DEDUSE CU FUNCŢIA CARACTERISTICĂ

Daniel Sitaru[1)]

Fie $E \neq \emptyset$ şi $A \subseteq E$. Definim funcţia caracteristică a mulţimii A prin $\varphi_A : E \to \{0,1\}$,

$$\varphi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A. \end{cases}$$

Se pot demonstra uşor (exerciţiu!) următoarele proprietăţi ale funcţiei caracteristice pentru $A \subseteq E$ şi $B \subseteq E$:

1. $\varphi_{A\cup B} = \varphi_A + \varphi_B - \varphi_A\varphi_B$.
2. $\varphi_{A\cap B} = \varphi_A\varphi_B$.
3. $\varphi_{A\setminus B} = \varphi_A - \varphi_A\varphi_B$.
4. $\varphi_{A\Delta B} = \varphi_A + \varphi_B - 2\varphi_A\varphi_B$, unde $A\Delta B = (A\setminus B) \cup (B\setminus A)$.
5. $\varphi_A^2 = \varphi_A$.
6. $\varphi_\emptyset = 0$, $\varphi_E = 1$.
7. $\varphi_{C_E A} = 1 - \varphi_A$.
8. $A = B \Leftrightarrow \varphi_A = \varphi_B$ şi, mai general, $A \subseteq B \Leftrightarrow \varphi_A \leq \varphi_B$.

De exemplu, pentru 1) observăm că, dacă $x \in E$ şi aparţine cel puţin uneia dintre mulţimile A, B, atunci ambii membri au valoarea în punctul x egală cu 1, iar dacă $x \in E$ şi nu aparţine niciuneia dintre mulţimile A, B, atunci ambii membri au valoarea în punctul x egală cu 0.

În cele ce urmează vom rezolva câteva probleme din manualele de algebră de liceu şi vom propune unele aplicaţii.

1. Arătaţi că, dacă A, B, C sunt trei mulţimi astfel încât $A\cup B = A\cup C$ şi $A \cap B = A \cap C$, atunci $B = C$.

Soluţie. Din $A\cap B = A\cap C$ rezultă $\varphi_{A\cap B} = \varphi_{A\cap C}$, adică $\varphi_A\varphi_B = \varphi_A\varphi_C$. Din $A \cup B = A \cup C$ rezultă $\varphi_{A\cup B} = \varphi_{A\cup C}$, deci

$$\varphi_A + \varphi_B - \varphi_A\varphi_B = \varphi_A + \varphi_C - \varphi_A\varphi_C,$$

de unde $\varphi_B = \varphi_C$, adică $B = C$.

2. Arătaţi că dacă A, B sunt mulţimi, atunci relaţiile $A \cap B = A$ şi $A \cup B = B$ sunt echivalente.

Soluţie. Fie X o mulţime care include mulţimile A, B. Considerând funcţii caracteristice în raport cu X, relaţia $A \cap B = A$ este echivalentă cu $\varphi_A\varphi_B = \varphi_A$.

$A\cup B = B$ este echivalentă cu $\varphi_A+\varphi_B-\varphi_A\varphi_B = \varphi_B$, adică $\varphi_A = \varphi_A\varphi_B$.

Astfel, $A \cap B = A$ şi $A \cup B = B$ sunt echivalente cu aceeaşi relaţie.

3. Arătaţi că $(A\Delta B)\,\Delta C = A\Delta\,(B\Delta C)$

Soluţie. $\varphi_{(A\Delta B)\Delta C} = \varphi_{A\Delta B} + \varphi_C - 2\varphi_{A\Delta B}\varphi_C = \varphi_A + \varphi_B + \varphi_C - 2\varphi_A\varphi_B - 2\varphi_A\varphi_C - 2\varphi_B\varphi_C + 4\varphi_A\varphi_B\varphi_C$.

[1)] Profesor, Colegiul Naţional Economic „Theodor Costescu“, Drobeta Turnu Severin.

Pentru $\varphi_{A\Delta(B\Delta C)} = \varphi_{(B\Delta C)\Delta A}$ obţinem aceeaşi expresie, deoarece rezultatul precedent este simetric în A, B, C. Astfel $\varphi_{(A\Delta B)\Delta C} = \varphi_{A\Delta(B\Delta C)}$, adică $(A\Delta B)\,\Delta C = A\Delta\,(B\Delta C)$.

4. Arătaţi că $A \cap (B\Delta C) = (A \cap B)\,\Delta\,(A \cap C)$.

Soluţie. $\varphi_{A\cap(B\Delta C)} = \varphi_A\varphi_{B\Delta C} = \varphi_A\left(\varphi_B + \varphi_C - 2\varphi_B\varphi_C\right) =$
$= \varphi_A\varphi_B + \varphi_A\varphi_C - 2\varphi_A\varphi_B\varphi_C;$

$$\begin{aligned}\varphi_{(A\cap B)\Delta(A\cap C)} &= \varphi_{A\cap B} + \varphi_{A\cap C} - 2\varphi_{A\cap B}\varphi_{A\cap C} =\\ &= \varphi_A\varphi_B + \varphi_A\varphi_C - 2\varphi_A\varphi_B\varphi_A\varphi_C =\\ &= \varphi_A\varphi_B + \varphi_A\varphi_C - 2\varphi_A\varphi_B\varphi_C.\end{aligned}$$

Din relaţiile de mai sus deducem $\varphi_{A\cap(B\Delta C)} = \varphi_{(A\cap B)\Delta(A\cap C)}$, deci concluzia.

5. Fie E o mulţime şi funcţia care asociază fiecărei mulţimi inclusă în E complementara ei: $C_E : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E)$, $C_E(X) = E\backslash X$,Â pentru orice $X \in \mathcal{P}(E)$. Arătaţi că aplicaţia C_E are proprietăţile (legile lui *de Morgan*):

1. $C_E(X \cup Y) = C_E(X) \cap C_E(Y)$;
2. $C_E(X \cap Y) = C_E(X) \cup C_E(Y)$.

Soluţie. 1. $\varphi_{C_E(X\cup Y)} = 1 - \varphi_{X\cup Y} = 1 - \varphi_X - \varphi_Y + \varphi_X\varphi_Y$.
$\varphi_{C_E(X)\cap C_E(Y)} = \varphi_{C_E(X)}\varphi_{C_E(Y)} = (1-\varphi_X)(1-\varphi_Y) =$
$= 1 - \varphi_X - \varphi_Y + \varphi_X\varphi_Y$, ceea ce demonstrează cerinţa.

2. $\varphi_{C_E(X\cap Y)} = 1 - \varphi_{X\cap Y} = 1 - \varphi_X\varphi_Y$.

$$\begin{aligned}\varphi_{C_E(X)\cup C_E(Y)} &= \varphi_{C_E(X)} + \varphi_{C_E(Y)} - \varphi_{C_E(X)}\varphi_{C_E(Y)} =\\ &= 1 - \varphi_X + 1 - \varphi_Y - (1-\varphi_X)(1-\varphi_Y) = 1 - \varphi_X\varphi_Y,\end{aligned}$$

ceea ce demonstrează cerinţa.

Probleme propuse

1. Fie A, B, C mulţimi date. Rezolvaţi ecuaţiile în X:

a) $A\Delta X = B$;

b) $A\Delta X\Delta B = C$.

2. Fie E o mulţime nevidă şi $A \in \mathcal{P}(E)$ o mulţime fixată. Arătaţi că funcţia $f : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E)$, $f(X) = A\Delta X$ este bijectivă.

3. Fie $A_n = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$, $n \in \mathbb{N}^*$, fixat. Arătaţi că $(\mathcal{P}(A_n), \Delta, \cap)$ este inel comutativ cu divizori ai lui zero. Determinaţi elementele inversabile ale inelului.

Bibliografie

[1] C. Năstăsescu, C. Niţă, Gh. Rizescu, *Manual de algebră pentru clasa a IX-a*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti.

[2] Ion D. Ion, A. Ghioca, N. Nediţă, *Manual de algebră pentru clasa a XII-a*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti.