(ii) Din $t = d$, rezultă $p^n \leq \sum_{\alpha\in K} |B_\alpha| = \sum_{\alpha\in K} p^{n-d} = p^{n-d}p^d = p^n$, deci $\sum_{\alpha\in K} |B_\alpha| = \sum_{\alpha\in K} p^{n-d}$. Cum $|B_\alpha| \leq p^{n-d}$, $\forall\, \alpha \in K$, rezultă $|B_\alpha| = p^{n-d}$, $\forall\, \alpha \in K$. În definitiv, polinomul f_α are exact p^{n-d} rădăcini în L.

PROBLEME PROPUSE

PROBLEME PENTRU EXAMENE NAŢIONALE[1)]

Clasa a VII-a

1. Ordonaţi crescător numerele $-\frac{2537}{1825}$, $-\frac{279}{35}$, $-\frac{1504}{1541}$.

2. Calculaţi $\left|15\sqrt{2} - 13\sqrt{3}\right|$.

3. Câte soluţii reale are ecuaţia $x(x+5) = 2015$? Justificaţi răspunsul dat.

4. Arătaţi că mijloacele laturilor unui romb sunt vârfurile unui dreptunghi.

5. În paralelogramul $ABCD$ notăm $\{O\} = AC \cap BD$. Aflaţi aria paralelogramului, ştiind că aria triunghiului AOD este egală cu 12 cm^2.

6. Lungimea diagonalei unui pătrat este egală cu 8 cm. Aflaţi aria pătratului.

Clasa a VIII-a

7. Dacă $A = \left\{\frac{1}{2}, -1, \frac{3}{4}, \sqrt{16}, \sqrt{8}, -\frac{1}{4}\right\}$, calculaţi suma elementelor mulţimii $A \cap \mathbb{Q}$.

8. Calculaţi media aritmetică a numerelor $a = \frac{2}{\sqrt{6}-2}$ şi $b = \frac{3}{3+\sqrt{6}}$.

9. Calculaţi media geometrică dintre un număr real pozitiv şi inversul său.

10. Suma lungimilor tuturor muchiilor unui cub este 72 cm. Aflaţi aria unei feţe a cubului.

11. În cubul $ABCDA'B'C'D'$, punctul M este mijlocul lui (AA') şi N este mijlocul lui (BB'). Aflaţi măsura unghiului dintre dreptele DM şi $C'N$.

12. În tetraedrul $ABCD$, $M \in (AB)$ astfel încât $BM = 2 \cdot AM$, iar N este centrul de greutate al triunghiului ACD. Stabiliţi poziţia dreptei MN faţă de planul (BCD).

[1)] La problemele din această rubrică nu se primesc soluţii. (N.R.)

Clasa a IX-a

13. Să se descompună suma
$$(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3.$$

14. Să se calculeze
$$1\cdot 2\cdot 3+2\cdot 3\cdot 4+\ldots+999\cdot 1000\cdot 1001.$$

15. Să se arate că $2^n \geq n^3+24$, oricare ar fi $n \geq 10$ natural.

16. Să se scrie numărul 13^3 ca sumă de două pătrate perfecte.

17. Să se arate că
$$\overrightarrow{AX}+\overrightarrow{BY}+\overrightarrow{CZ}=\overrightarrow{AY}+\overrightarrow{BZ}+\overrightarrow{CX}.$$

18. Fie $ABCDEF$ un hexagon regulat. Să se descompună $\overrightarrow{BD}$ după direcţiile vectorilor $\overrightarrow{AF}$ şi $\overrightarrow{CE}$.

Clasa a X-a

19. Să se arate că $(\log_2 3)^2 \notin \mathbb{Q}$.

20. Să se arate că $\log_3 5+\log_5 3 \geq \log_2 4$.

21. Să se calculeze suma: $\displaystyle\sum_{k=1}^{10^3}[\lg k]$.

22. Să se determine a pentru care numerele $\log_2(a-2)$, $\log_2 a$, $\log_2(a+4)$ sunt în progresie aritmetică.

23. Să se rezolve ecuaţia $4^x+2^x=72$.

24. Să se determine x pentru care
$$\left(2+\sqrt{3}\right)^x+\left(2-\sqrt{3}\right)^x=7.$$

Clasa a XI-a

25. Fie mulţimea $M=\left\{A\in\mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \mid A^3=\begin{pmatrix}-3 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}\right\}$.

a) Arătaţi că rangul oricărei matrice din M este egal cu 2.

b) Demonstraţi că pentru $A\in M$, ecuaţia $X^2=A$, nu are soluţii în $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

c) Calculaţi A^{2016}, $A\in M$.

26. Fie funcţia $f:\mathbb{R}\setminus\{-4\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x+3}{x+4}$.

a) Determinaţi asimptotele graficului funcţiei f.

b) Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+f(1)\cdot f(2)\cdot\ldots\cdot f(n)\right)^n$.

c) Fie şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ definit prin $x_1=2$ şi $x_{n+1}=f(x_n)$. Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Clasa a XII-a

27. Pe $\mathbb{R}$ definim legea de compoziţie „ $*$ “ prin

$$x * y = -3xy + 4x + 4y - 4.$$

a) Să se arate că mulţimea $G = \left(-\infty, \frac{4}{3}\right)$ este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu legea „ $*$ “.

b) Să se arate că „ $*$ “ are element neutru în G.

c) Să se arate că „ $*$ “ este lege asociativă.

28. Fie funcţia $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{4}\left(x^2 + x + 1\right)$.

a) Să se determine primitiva F a lui f cu $F(0) = 1$.

b) Să se calculeze aria subgraficului funcţie f.

c) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_0^1 f^n(x)\mathrm{d}x$.