Clasa a IX-a

13. Fie $(a_n)_n$ şirul definit astfel:

$$a_1 = 1 \text{ şi } a_{n+1} = a_n + \frac{1}{n^4 + n^2}, \quad n \geq 1.$$

Calculaţi a_{2014}.

14. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ o progresie aritmetică de numere naturale nenule. Arătaţi că şirul $(b_n)_{n\geq 1}$ cu $b_n = a_{a_n}$, $n \geq 1$, este progresie geometrică.

15. Determinaţi valorile reale ale lui m pentru care ecuaţia

$$x^2 - mx + 1 = 0$$

are ambele rădăcini numere întregi.

16. Arătaţi că funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ este periodică.

17. Arătaţi că graficul funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + 5$, are centru de simetrie.

18. Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Arătaţi că funcţia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$g(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2014}$$

este funcţie impară.

Clasa a X-a

19. Câte numere naturale n au proprietatea că $[\lg n] = 10$?

20. Să se arate că

$$\log_2(n+1) + \log_2(n+2) + \ldots + \log_2(n+n) \leq n + \log_2 2 + \log_2 3 + \ldots + \log_2 n,$$

oricare ar fi $n \geq 2$.

21. Să se rezolve ecuaţia

$$\log_x(x+6) = 1 + 2\log_{x+6} x.$$

22. Să se arate că funcţia $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = z + 2\overline{z}$ este injectivă.

23. Să se rezolve în $\mathbb{C}$ ecuaţia $z^3 + 2\overline{z} = 0$.

24. Fie a, b, c numere complexe de modul 1. Ştiind că

$$|a + b - 2c| + |b + c - 2a| + |c + a - 2b| \geq 9,$$

să se arate că $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$.