PENTRU CERCURILE DE ELEVI

APLICAŢII LA TEOREMA LUI FROBENIUS DESPRE MATRICE

George-Florin Şerban[1)]

În această lecţie vom prezenta rezolvarea unor exerciţii, în care vom folosi noţiunea de polinom minimal al unei matrice şi teorema lui *Frobenius*. Pentru început vom aminti câteva fapte teoretice. Dacă nu se specifică altceva, $A \in \mathcal{M}_n(K)$ unde n este număr natural nenul şi K poate fi $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ sau $\mathbb{C}$.

Teoremă (Hamilton-Cayley). *Dacă definim*

$$p_A(X) = \det(XI_n - A) = X^n + a_1X^{n-1} + \ldots + a_{n-1}X + a_n$$

(polinomul caracteristic al matricei A), atunci

$$p_A(A) = A^n + a_1A^{n-1} + \ldots + a_{n-1}A + a_nI_n = O_n.$$

Definiţie. *Fie $A \in \mathcal{M}_n(K)$ unde K poate fi $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ sau $\mathbb{C}$. Polinomul monic (i.e. având coeficientul dominant egal cu 1) de grad minim din $K[X]$ care admite pe A ca rădăcină se numeşte polinomul minimal al lui A şi se notează $m_A(X)$.*

Dacă $p(A) = O_2$ pentru un polinom oarecare $p \in K[X]$, atunci p este divizibil cu polinomul minimal al matricei A. Astfel, polinomul minimal divide polinomul caracteristic; în particular, gradul polinomului minimal este mai mic sau egal decât gradul polinomului caracteristic. Aceste fapte sunt completate de următoarea teoremă.

Teorema lui Frobenius. *Polinoamele m_A şi p_A admit aceiaşi divizori ireductibili peste K.*

De exemplu, dacă $n = 2$, atunci

• dacă grad$(m_A) = 1$, atunci există $a \in K$ astfel încât $m_A = X - a$ şi $p_A = (X - a)^2$;

• dacă grad$(m_A) = 2$ atunci $m_A = p_A$.

De asemenea, dacă $n = 3$, atunci

• dacă grad$(m_A) = 1$ atunci există $a \in K$ astfel încât $m_A = X - a$ şi $p_A = (X - a)^3$;

• dacă grad$(m_A) = 2$ atunci există $a, b \in K$ (nu neapărat distincte) astfel încât $m_A = (X - a)(X - b)$ şi $p_A = (X - a)^2(X - b)$;

• dacă grad$(m_A) = 3$ atunci $m_A = p_A$.

În continuare voi prezenta aplicaţii ale acestor proprietăţi.

[1)] Profesor, Liceul Pedagogic „D.P. Perpessicius", Brăila

1. (*Olimpiada de matematică, faza naţională* 1988) Fie $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ cu $\operatorname{tr}(A) > 2$. Să se arate că, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$, $A^n \neq I_2$.

Soluţie. Presupunem prin absurd că $A^n = I_2$, deci $A^n - I_2 = O_2$ şi $m_A \mid (X^n - 1)$.

Dacă $\operatorname{grad}(m_A) = 1$, atunci $m_A = X \pm 1$, deci $A \pm I_2 = O_2$, $A = \pm I_2$, $\operatorname{tr}(A) = \pm 2$, fals.

Dacă $\operatorname{grad}(m_A) = 2$, atunci $m_A = p_A \in \mathbb{R}[X]$. Cum $X^n - 1$ are rădăcinile simple $x_k = \cos\dfrac{2k\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\dfrac{2k\pi}{n}$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$ şi p_A are coeficienţi reali, reiese că p_A este produsul a doi factori corespunzând unor rădăcini conjugate:

$$p_A(X) = \Big(X - \Big(\cos\frac{2k\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{2k\pi}{n}\Big)\Big)\Big(X - \Big(\cos\frac{2k\pi}{n} - \mathrm{i}\sin\frac{2k\pi}{n}\Big)\Big),$$

deci $p_A = m_A = X^2 - 2X\cos\dfrac{2k\pi}{n} + 1$. Cum $p_A = X^2 - 2\operatorname{tr}(A)X + \det(A)$, ar rezulta $\operatorname{tr}(A) = 2\cos\dfrac{2k\pi}{n} \leq 2$, fals.

În concluzie $A^n \neq I_2$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.

2. (*Olimpiada de matematică, faza naţională* 1990) Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ cu $A^k = aA$, unde $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ şi $k \in \mathbb{N}^*$. Să se arate că matricea $B = A + I_n$ este inversabilă.

Soluţie. $A^k - aA = O_n$ implică $m_A \mid p = X^k - aX$. Cum $p(-1) = (-1)^k + a \neq 0$, rezultă $m_A(-1) \neq 0$, deci m_A nu are rădăcina -1. În acest caz, conform teoremei lui *Frobenius*, nici p_A nu are rădăcina -1. Deoarece $p_A = (-1)^n \det(A - XI_n)$, deducem $0 \neq p_A(-1) = (-1)^n \det(A + I_n)$, adică $\det(B) \neq 0$.

3. (*Concursul Interjudeţean de Matematică „Gheorghe Lazăr”* 2008) Să se arate că, dacă $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ şi $A^3 = A + I_n$, atunci $\det(A) > 0$.

Soluţie. Funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dată de $f(x) = x^3 - x - 1$ are derivata $f'(x) = 3x^2 - 1$, cu rădăcinile $x_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, $x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Aplicăm şirul lui *Rolle*: $f(-\infty) < 0$, $f(x_1) < 0$, $f(x_2) < 0$, $f(\infty) > 0$. Deci, funcţia are o singură rădăcină reală a, situată în intervalul $(1, 2)$. Rezultă

$$m_A \mid (X^3 - X - 1) = (X - a)(X^2 + bX + c),$$

cu $ac = 1$ şi $a > 0$, deci $c > 0$. Astfel $m_A = (X - a)^s (X^2 + bX + c)^t$ şi, conform teoremei lui *Frobenius*,

$$p_A = (X - a)^u (X^2 + bX + c)^v = (-1)^n \det(A - XI_n),$$

cu $u + 2v = n$. Deducem $p_A(0) = (-a)^u \cdot (c)^v = (-1)^n \det(A)$, deci

$$\det(A) = (-1)^{n+u} a^u c^v = (-1)^{2u+2v} a^u c^v = a^u c^v > 0.$$

4. (*Concursul „Nicolae Coculescu"* 2005) Fie matricea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ cu $A^3 = 4I_n - 3A$. Să se arate că $\det(A + I_n) = 2^n$.

Soluţie. $A^3 - 4I_n + 3A = O_n$ şi $X^3 + 3X - 4 = (X-1)(X^2 + X + 4)$ implică $m_A = (X-1)^s(X^2+X+4)^t$. Aplicăm teorema lui *Frobenius*:

$$p_A = (X-1)^u(X^2+X+4)^v = (-1)^n \det(A - XI_n), \quad u + 2v = n.$$

Deducem $p_A(-1) = (-2)^u 4^v = (-1)^n \det(A + I_n)$, deci

$$\det(A + I_n) = (-1)^{n+u} 2^u 4^v = (-1)^{2u+2v} 2^{u+2v} = 2^n.$$

5. (*Concursul „Nicolae Coculescu"* 2009) Considerăm $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ cu $A^3 = 3A - 2I_n$. Să se calculeze $\det(A^2 + A + I_n)$.

Soluţie. $A^3 - 3A + 2I_n = O_n$, $m_A \mid (X^3 - 3X + 2)$, $X^3 - 3X + 2 = (X-1)^2(X+2)$, deci $m_A = (X-1)^s(X+2)^t$. Aplicăm teorema lui *Frobenius*: $p_A = (X-1)^u(X+2)^v = (-1)^n \det(A - XI_n)$, $u + v = n$.

Avem $\det(A^2 + A + I_n) = \det(A - \varepsilon I_n)\det(A - \varepsilon^2 I_n)$, unde ε este rădăcină cubică a unităţii, $\varepsilon^3 = 1$ şi $\varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0$. Obţinem succesiv

$$p_A(\varepsilon) = (\varepsilon - 1)^u(\varepsilon + 2)^v = (-1)^n \det(A - \varepsilon I_n)$$
$$p_A(\varepsilon^2) = (\varepsilon^2 - 1)^u(\varepsilon^2 + 2)^v = (-1)^n \det(A - \varepsilon^2 I_n)$$
$$p_A(\varepsilon)p_A(\varepsilon^2) = (\varepsilon - 1)^u(\varepsilon + 2)^v(\varepsilon^2 - 1)^u(\varepsilon^2 + 2)^v = \det(A^2 + A + I_n)$$
$$\det(A^2 + A + I_n) = (\varepsilon^3 - \varepsilon - \varepsilon^2 + 1)^u(\varepsilon^3 + 2\varepsilon + 2\varepsilon^2 + 4)^v = 3^u 3^v = 3^n.$$

6. (*prelucrare GMB*) Vom spune că o matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ are proprietatea (P_n) dacă există $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, pentru care $A^n + A^{n-1} + A^{n-2} = O_2$. Arătaţi că, dacă $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ are proprietatea (P_{2010}) şi se notează $B = A^2 + A + I_2$, atunci matricea $I_2 - AB$ este inversabilă.

Soluţie. $A^{n-2}(A^2 + A + I_2) = O_2$, deci $m_A \mid X^{n-2}(X^2 + X + 1)$.

Dacă $\operatorname{grad}(m_A) = 1$, $m_A = X$ şi $p_A = X^2$, deci $A = O_2$, $B = I_2$, $I_2 - AB = I_2$ este inversabilă.

Dacă $\operatorname{grad}(m_A) = 2$, sunt posibile cazurile

• $p_A = m_A = X^2 + X + 1$, deci $A^2 + A + I_2 = O_2$, $B = O_2$, $I_2 - AB = I_2$ este inversabilă;

• $p_A = m_A = X^2$, deci $A^2 = O_2$, $B = A + I_2$, $I_2 - AB = I_2 - A(A + I_2) = I_2 - A$, de unde $\det(I_2 - AB) = \det(I_2 - A) = p_A(1) = 1$, adică matricea $I_2 - AB$ este inversabilă.

7. (*Concursul interjudeţean „Dan Barbilian"* 2011) Fie n un număr natural impar şi $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

a) Dacă $A^2 = O_n$, să se arate că

$$\det(2011A + 2I_n) \geq 0 \geq \det(2011A - 2I_n).$$

b) Dacă $A^2 = I_n$ să se demonstreze că $\det(A - I_n) \leq 0$.

Soluţie. a) $m_A \mid X^2$, deci $p_A = X^n$, n impar, $n \geq 3$, de unde obţinem $p_A = X^n = (-1)^n \det(A - XI_n) = -\det(A - XI_n)$. Relaţia cerută este

$$2011^n \det\Big(A + \frac{2}{2011}I_n\Big) \geq 0 \geq 2011^n \det\Big(A - \frac{2}{2011}I_n\Big)$$

şi rezultă imediat din

$$\det\Big(A - \frac{2}{2011}I_n\Big) = -p_A\Big(\frac{2}{2011}\Big) = -\frac{2^n}{2011^n} \leq 0,$$
$$\det\Big(A + \frac{2}{2011}I_n\Big) = -p_A\Big(-\frac{2}{2011}\Big) = \frac{2^n}{2011^n} \geq 0.$$

b) $A^2 - I_n = O_n$, deci $m_A \mid (X^2 - 1)$.

Dacă $\operatorname{grad}(m_A) = 1$, $m_A = X - 1$, $A = I_n$, $\det(A - I_n)^{2011} = 0 \leq 0$, sau $m_A = X + 1$, $A = -I_n$, $\det(A - I_n)^{2011} = -2^{2011n} \leq 0$.

Dacă $\operatorname{grad}(m_A) = 2$, atunci $m_A = X^2 - 1$ şi $p_A = (X-1)^u(X+1)^v = (-1)^n \det(A - XI_n)$, cu $u, v \geq 1$, de unde

$$\det(A - I_n) = -p_A(1) = -(1-1)^u(1+1)^v = 0.$$

8. (*Concursul centrelor de excelenţă din Moldova*, 2011) Dacă matricea $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ satisface relaţia $A^3 - 3A^2 + 4A = 2I_2$, să se arate că $\operatorname{tr}(A) = 2$.

Soluţie. Cum $X^3 - 3X^2 + 4X - 2 = (X-1)(X^2 - 2X + 2)$, rezultă $m_A \mid (X-1)(X^2 - 2X + 2)$.

Dacă $\operatorname{grad}(m_A) = 1$, atunci $m_A = X - 1$, $A = I_2$, $\operatorname{tr}(A) = 2$.

Dacă $\operatorname{grad}(m_A) = 2$, atunci $m_A = X^2 - 2X + 2 = p_A$, de unde rezultă $A^2 - 2A + 2I_2 = O_2 = A^2 - (\operatorname{tr}(A))A + \det(A)I_2$. Dacă $\operatorname{tr}(A) \neq 2$, atunci deducem $A = kI_2$, $k \in \mathbb{R}$, de unde $k^3 - 3k^2 + 4k - 2 = 0$, ecuaţie a cărei singură soluţie reală este 1, i.e. $A = I_2$ – imposibil în acest caz.

9. (*Concursul interjudeţean „Unirea"* 2005) Fie $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ astfel încât $AB = BA$ şi există numerele naturale nenule m, n astfel încât $A^m = O_2$ şi $B^n = O_2$. Să se arate că $AB = O_2$.

Soluţie. $A^m = O_2$ şi $B^n = O_2$, deci $m_A \mid X^m$ şi $m_B \mid X^n$.

Dacă $\operatorname{grad}(m_A) = 1$ atunci $m_A = X$, $A = O_2$ deci $AB = O_2$; analog dacă $\operatorname{grad}(m_B) = 1$.

Dacă $\operatorname{grad}(m_A) = 2$ şi $\operatorname{grad}(m_B) = 2$ atunci $m_A = X^2 = p_A$, deci $A^2 = O_2$; analog $B^2 = O_2$. Rezultă

$$(A+B)^4 = A^4 + 4A^3B + 6A^2B^2 + 4AB^3 + B^4 = O_2,$$

deci $m_{A+B} \mid X^4$.

Dacă $\operatorname{grad}(m_{A+B}) = 1$ atunci $m_{A+B} = X$, $A + B = O_2$, $A = -B$, deci $AB = -A^2 = O_2$.

Dacă $\operatorname{grad}(m_{A+B}) = 2$, atunci $m_{A+B} = X^2 = p_{A+B}$, deci $(A+B)^2 = O_2$. Dar $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2 = 2AB = O_2$, deci $AB = O_2$.

10. (*Concursul interjudeţean „Unirea"* 2009) Arătaţi că, dacă matricea $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ satisface $A^4 = I_2$, atunci $A^2 = I_2$ sau $A^2 = -I_2$.

Soluţie. Vom arăta că această proprietate are loc pentru $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Din $A^4 - I_2 = O_2$ reiese $m_A \mid (X-1)(X+1)(X^2+1)$.

Dacă $\text{grad}(m_A) = 1$, atunci $m_A = X - 1$, $A = I_2$, sau $m_A = X + 1$, $A = -I_2$; în ambele cazuri, $A^2 = I_2$.

Dacă $\text{grad}(m_A) = 2$, atunci $m_A = X^2 - 1 = p_A$, deci $A^2 = I_2$, sau $m_A = X^2 + 1 = p_A$, deci $A^2 = -I_2$.

11. Să se arate că, dacă există matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Q})$ inversabile astfel ca $A^{-1} = A^2 + A$, atunci n este divizibil cu 3.

Soluţie. Din $A^{-1} = A^2 + A$ rezultă, prin înmulţire cu A, $A^3 + A^2 - I_n = O_n$, deci $m_A \mid (X^3 + X^2 - 1)$. Deoarece $X^3 + X^2 - 1$ este ireductibil în $\mathbb{Q}[X]$, $m_A = X^3 + X^2 - 1$. Conform teoremei lui *Frobenius*, p_A are aceiaşi factori ireductibili ca m_A, deci $p_A = (X^3 + X^2 - 1)^u$, unde $3u = n$, adică n este divizibil cu 3.

12. (*Concursul interjudeţean „Cezar Ivănescu"* 2006) Fie $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ pentru care există $\lambda \in (0, \sqrt[3]{4})$ astfel încât $A^3 = \lambda A + I_3$. Demonstraţi că matricea A este inversabilă şi $\det(A) > 0$.

Soluţie. $A^3 - \lambda A - I_3 = O_3$, deci $m_A \mid (X^3 - \lambda X - 1)$. Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dată de $f(x) = x^3 - \lambda x - 1$. Derivata $f'(x) = 3x^2 - \lambda$ are rădăcinile $x_1 = -\sqrt{\dfrac{\lambda}{3}}$, $x_2 = \sqrt{\dfrac{\lambda}{3}}$. Avem $f(x_1) = \dfrac{2\lambda\sqrt{\lambda} - 3\sqrt{3}}{3\sqrt{3}} < 0$ deoarece $2\lambda\sqrt{\lambda} < 3\sqrt{3}$, $4\lambda^3 < 27$ şi $4\lambda^3 < 4 \cdot 4 < 27$, iar $f(x_2) = \dfrac{-2\lambda\sqrt{\lambda} - 3\sqrt{3}}{3\sqrt{3}} < 0$. Deci $f(-\infty) < 0$, $f(x_1) < 0$, $f(x_2) < 0$, $f(\infty) > 0$, ceea ce arată că ecuaţia $x^3 - \lambda x - 1 = 0$ are o singură soluţie reală pozitivă $a \in (x_2, \infty)$. Astfel, $X^3 - \lambda X - 1 = (X - a)(X^2 + bX + c)$, $b^2 - 4c < 0$.

Dacă $\text{grad}(m_A) = 1$, atunci $m_A = X - a$, $A = aI_3$ şi $\det(A) = a^3 > 0$.

Cazul $\text{grad}(m_A) = 2$ este imposibil, deoarece în această situaţie m_A ar fi ireductibil de grad 2, iar p_A ar fi o putere a lui m_A.

Dacă $\text{grad}(m_A) = 3$, $m_A = p_A$. Obţinem

$$A^3 - \lambda A - I_3 = O_3 = A^3 - \text{tr}(A)A^2 + \text{tr}(A^*)A - \det(A)I_3,$$

de unde $\text{tr}(A) = 0$ (altfel polinomul minimal al lui A ar avea grad cel mult 2), apoi $\text{tr}(A^*) = -\lambda$ (acelaşi argument) şi, în final, $\det(A) = 1$.

13. (*Concursul interjudeţean „Unirea"* 2006) Fie o matrice $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ pentru care există $k \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $B^k = O_2$. Arătaţi că, dacă $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ este astfel încât $AB = BA$, atunci $\det(A + B) = \det A$.

Soluţie. $B^k = O_2$, deci $m_B \mid X^k$.

Dacă $\text{grad}(m_B) = 1$, $m_B = X$, $B = O_2$ şi $\det(A + B) = \det A$.

Dacă $\text{grad}(m_B) = 2$, $m_B = X^2 = p_B$, deci $B^2 = O_2$. Fie

$$P(X) = \det(A + XB) = X^2 \det(B) + aX + \det(A) = aX + \det(A).$$

Atunci $P(1) = \det(A+B) = a + \det A$, $P(-1) = \det(A-B) = -a + \det A$, $\det(A+B) + \det(A-B) = 2\det A$, de unde

$$(\det A)^2 = \left(\frac{\det(A+B) + \det(A-B)}{2}\right)^2 \geq$$
$$\geq \det(A+B)\det(A-B) = \det(A^2 - B^2) = (\det A)^2.$$

Egalitatea are loc pentru $\det(A+B) = \det(A-B)$, de unde $a = 0$, adică $\det(A+B) = \det A$.

14. (*Concursul interjudeţean „Traian Lalescu"* 2013) Arătaţi că, dacă $A \in \mathcal{M}_{2013}(\mathbb{R})$, atunci $(A^2 + I_{2013})^n \neq O_{2013}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Soluţie. Presupunem prin absurd că există $n \in \mathbb{N}$ cu $(A^2 + I_{2013})^m = O_{2013}$. Atunci $m_A \mid (X^2+1)^n$, deci $m_A = (X^2+1)^r$ şi $p_A = (X^2+1)^u$. Aceasta ar implica $\text{grad}(p_A) = 2013 = 2u$ – fals – ceea ce arată că presupunerea făcută este falsă.

15. (*Concursul interjudeţean „Marian Ţarină"* 2013) Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $n \geq 2$, astfel încât $A^{2013} + A^{2014} = O_n$. Dacă $B = A + I_n$, demonstraţi că matricea $I_n - AB$ este inversabilă.

Soluţie. $A^{2013}(A+I_n) = O_n$, deci $m_A \mid X^{2013}(X+1)$, $m_A = X^s(X+1)^t$, $t \in \{0,1\}$. Rezultă că $p_A = X^u(X+1)^v = (-1)^n \det(A - XI_n)$, $u + v = n$.

Apoi $I_n - AB = I_n - A - A^2$ şi

$$\det(I_n - A - A^2) = (-1)^n \det(A^2 + A - I_n) =$$
$$= (-1)^n \det(A - x_1 I_n)\det(A - x_2 I_n),$$

unde x_1 şi x_2 sunt soluţiile ecuaţiei $x^2 + x - 1 = 0$, deci $x_1 + x_2 = -1 = x_1 x_2$. Obţinem

$$\det(I_n - A - A^2) = p_A(x_1)p_A(x_2)(-1)^n = x_1^u(x_1+1)^v x_2^u(x_2+1)^v(-1)^n =$$
$$= (x_1x_2)^u(1 + x_1 + x_2 + x_1x_2)^v(-1)^n = (-1)^n(-1)^n = 1.$$

Deci, matricea $I_n - AB$ este inversabilă.

În încheiere, propunem ca temă următoarele exerciţii:

1. (*Concursul „Nicolae Coculescu"* 2009) Fie $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $r > 0$ un număr real fixat şi $\text{tr}(A) > 2r$. Să se arate că $A^n \neq r^n I_2$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.

2. (*Olimpiada de matematică, faza locală, Brăila* 2010) Considerăm $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $n \geq 2$ astfel încât $A^k - A^{k+1} + A^{k+2} = O_n$, unde $k \in \mathbb{N}$ impar şi $B = I_n - A + A^2$. Arătaţi că matricele $I_n - AB$ şi $I_n - BA$ sunt inversabile.

3. (*Olimpiada de matematică, faza locală, Braşov*, 2010) Spunem că o matrice $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ este nilpotentă dacă există $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $X^n = O_2$. Fie $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ două matrice nenule, nilpotente. Să se demonstreze că matricea $A + B$ este nilpotentă dacă şi numai dacă matricele AB şi BA sunt nilpotente.

4. (*Concursul interjudeţean „Cristian Calude”* 2005) Arătaţi că, dacă $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $A^2 = I_n$ şi n este impar, atunci $\det(A + I_n) \geq \det(A - I_n)$.

5. (*Olimpiada de matematică, faza naţională*, 1993) Există matrice $A, B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ cu $(AB - BA)^{1993} = I_3$?

6. (*Concursul „Nicolae Coculescu”*, 2004) Să se rezolve ecuaţia $X^3 + X + 2I_2 = O_2$, $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

BIBLIOGRAFIE

[1] Ion D. Ion, *O demonstraţie elementară pentru o teoremă a lui Frobenius*, Gazeta Matematică – Seria B, nr 11-12/1987.

EXAMENE ŞI CONCURSURI

CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ „ARGUMENT“

Ediţia a V-a, Baia Mare, 9 Noiembrie 2013

prezentare de VASILE POP[1)] şi NICOLAE MUŞUROIA[2)]

În perioada 8-9 noiembrie 2013 s-a desfăşurat la Baia Mare cea de-a cincea ediţie a Concursului Interjudeţean de Matematică „Argument“. Organizatorii acestuia au fost membrii catedrei de matematică a Colegiului Naţional „Gheorghe Şincai“ din localitate, în parteneriat cu Inspectoratul Şcolar Judeţean Maramureş. Cu această ocazie a fost lansat cel de-al cincisprezecelea număr al revistei „Argument“, editat de catedra de matematică a liceului gazdă. Preşedintele concursului a fost şi de această dată, domnul conferenţiar *Vasile Pop*, de la Universitatea Tehnică din Cluj Napoca. La concurs au participat loturile colegiilor naţionale: „Andrei Mureşanu“ – Dej, „Mihai Eminescu“ – Satu Mare, „Alexandru Papiu Ilarian“ – Târgu Mureş, „Silvania“ – Zalău, „Liviu Rebreanu“ – Bistriţa, „Dragoş Vodă“ – Sighetu Marmaţiei, „Vasile Lucaciu“ – Baia Mare, „Gheorghe Şincai“ – Baia Mare, precum şi elevi de gimnaziu de la şcolile reprezentative din judeţ.

Prezentăm în continuare enunţurile problemelor de la liceu, o selecţie din cele de la gimnaziu şi lista premianţilor.

Clasa a IX-a

1. Se consideră în plan punctele $A_1, A_2, \ldots, A_n$ şi punctul M. Se notează cu B_1 simetricul lui M faţă de centrul de greutate al sistemului de puncte $\{A_2, A_3, \ldots, A_n\}$. Analog se definesc punctele $B_2, B_3, \ldots, B_n$.

a) Arătaţi că dreptele $A_1B_1, A_2B_2, \ldots, A_nB_n$ sunt concurente într-un punct I.

[1)] Conf. univ. dr., Universitatea Tehnică Cluj Napoca

[2)] Profesor, Colegiul Naţional „Gheorghe Şincai“, Baia Mare