PROBLEME PROPUSE

PROBLEME PENTRU EXAMENE NAŢIONALE[1)]

Clasele a VII-a şi a VIII-a

Prezentăm mai jos un model pentru proba de matematică a Evaluării Naţionale a elevilor din clasa a VIII-a.

SUBIECTUL I

1. Suma divizorilor proprii ai numărului 12 este egală cu ...

2. Rezultatul calculului $18 - 9 : 3$ este egal cu ...

3. Dacă $\frac{a}{3} = \frac{5}{b}$, atunci $ab + 5$ este egal cu ...

4. $\sin 45^0 - \cos 45^0 = ...$

5. Diagonala unei feţe a unui cub este egală cu $4\sqrt{2}$ cm. Volumul cubului este egal cu ...cm^3.

6. În tabelul de mai jos sunt redate temperaturile medii din zilele unei săptămâni, ziua şi noaptea.

	Luni	Marţi	Miercuri	Joi	Vineri	Sâmbătă	Duminică
Ziua	4^0	3^0	5^0	5^0	6^0	5^0	4^0
Noaptea	-3^0	-2^0	-3^0	-5^0	-2^0	0^0	1^0

Cea mai mare diferenţă de temperatură s-a înregistrat în ziua de ...

SUBIECTUL al II-lea

7. Desenaţi o piramidă triunghiulară regulată cu vârful V şi baza ABC.

8. Calculaţi media aritmetică a numerelor $a = \sqrt{21 - 8\sqrt{5}}$ şi $b = \sqrt{(2 - \sqrt{5})^2}$.

9. Pentru patru cărţi şi trei caiete s-au plătit 88 de lei. Preţul unui caiet este jumătate din preţul unei cărţi. Aflaţi preţul unei cărţi.

10. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 2x + 3$.

a) Reprezentaţi grafic funcţia;

b) Determinaţi x pentru care un punct al graficului are abscisa egală cu ordonata.

11. Arătaţi că expresia

$$E(x) = \left(\frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x+1}\right) : \left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1}\right),\ x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$$

nu depinde de x.

1) La problemele din această rubrică nu se primesc soluţii.

SUBIECTUL al III-lea

12. Un teren are forma unui trapez isoscel $ABCD$, $AB \parallel CD$ cu $AB = 16$ dam şi $AD = DC = 8$ dam.

a) Arătaţi că distanţa dintre bazele trapezului este egală cu $4\sqrt{3}$ dam.

b) Arătaţi că $\mathcal{A}_{\triangle ABC} = 2 \cdot \mathcal{A}_{\triangle ACD}$.

c) Arătaţi că $(AC$ este bisectoarea unghiului DAB.

13. Un acoperiş are formă de piramidă patrulateră regulată $VABCD$, cu latura bazei $AB = 12$ m şi muchia laterală $VA = 2\sqrt{34}$ m.

a) Arătaţi că distanţa de la V la planul (ABC) este egală cu 8 m.

b) Calculaţi volumul piramidei.

c) Aflaţi aria laterală a piramidei.

Clasa a IX-a

14. Să se determine numărul natural n astfel încât

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \ldots + n \cdot 2^n = 263.$$

15. Să se arate că o progresie aritmetică de numere reale cu primul termen iraţional conţine cel mult un termen raţional.

16. În patrulaterul convex $ABCD$, O este punctul de intersecţie a diagonalelor, iar M şi N sunt mijloacele laturilor AB, respectiv CD.

Să se arate că dacă O, M, N sunt coliniare, atunci patrulaerul $ABCD$ este trapez.

17. Fie paralelogramul $ABCD$ cu $m(\sphericalangle A) = 30°$, $AB = 4$, $AD = 5$. Calculaţi modulul vectorului $\overline{AD} + \overline{AO} + \overline{AB}$, unde O este punctul de intersecţie a diagonalelor paralelogramului.

18. Se consideră funcţiile $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 4x + 3$ şi $g(x) = -x^2 + 2x + a$, unde a este un număr real. Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât mulţimea $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Im} g$ să aibă exact un element.

19. Să se determine valorile reale ale lui m astfel încât dreapta $2x - y + 1 = 0$ să fie tangentă parabolei $y = x^2 + 4x + m$.

Clasa a X-a

20. Câte elemente are mulţimea

$$\left\{z \in \mathbb{C} \mid z^6 = 1\right\} \cup \left\{z \in \mathbb{C} \mid z^{10} = 1\right\}.$$

21. Să se arate că funcţia $f : [1, \infty) \to [1, \infty)$, $f(x) = \dfrac{x^2 - x + 1}{x}$ este bijectivă.

22. Să se determine inversa funcţiei bijective $f : \mathbb{R} \to [1, \infty)$, $f(x) = \mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^x + 1$.

23. Să se determine cel mai mic termen al dezvoltării $\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)^{21}$.

24. Să se determine numerele naturale n astfel încât

$$C_3^3 + C_4^3 + C_5^3 + \ldots + C_{11}^3 = C_{12}^n.$$

25. Să se calculeze

$$S = C_{11}^2 - C_{11}^3 + C_{11}^4 - C_{11}^5 + C_{11}^6 - C_{11}^7.$$

Clasa a XI-a

26. Pentru fiecare $x \in \mathbb{R}$ se consideră matricea

$$A(x) = \begin{pmatrix} 1+3x & 0 & 3x \\ 0 & 1 & 0 \\ -x & 0 & 1-x \end{pmatrix}.$$

a) Să se calculeze $\det A(0)$.

b) Să se determine $a \in \mathbb{R}$ pentru care $A(x)A(a) = A(a)$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

c) Să se determine inversa matricei $A(3)$.

27. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+2}\right)$.

a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

b) Să se arate că f este covexă pe $[0, \infty)$.

c) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{\ln(2x+3)}$.

Clasa a XII-a

28. Se consideră polinomul $f = X^4 - X + 3 \in \mathbb{C}[X]$ şi $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{C}$ rădăcinile lui.

a) Să se determine restul împărţirii lui f la $X - 3$.

b) Să se calculeze $\left(1 - x_1^4\right)\left(1 - x_2^4\right)\left(1 - x_3^4\right)\left(1 - x_4^4\right)$.

c) Să se calculeze $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3$.

29. Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}^*$ se consideră numărul $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n \sqrt{x^2+3}\,\mathrm{d}x$.

a) Să se calculeze I_1.

b) Să se arate că $(n+3)I_{n+1} + 3nI_n = 8$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.

c) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} nI_n$.