Solution. If we denote by V_A, V_B, V_C, V_D the volumes of the tetrahedrons $[MBCD]$, $[MCDA]$, $[MDAB]$, $[MABC]$, then $V_A = \dfrac{d_A s_A}{3}$ and the analogues, so, by *J. Radon*'s inequality,

$$\sum \frac{d_A^{m+1} s_A^{m+1}}{x^m} = \sum \frac{3^{m+1} V_A^{m+1}}{x^m} \geq \frac{\left(\sum 3V_A\right)^{m+1}}{\left(\sum x\right)^m} = \frac{3^{m+1} V^{m+1}}{(x+y+z+t)^m},$$

and we are done.

References

[1] Colecţia *Gazeta Matematică* (1895-2011).

PENTRU CERCURILE DE ELEVI

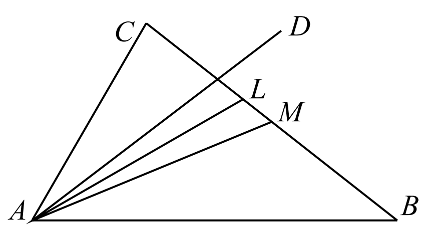
BUCURIA SIMEDIANEI

Alexandru Negrescu[1)]

Vitregirea de geometrie le ascunde copiilor o bijuterie de mare preţ: *simediana.* În rezolvarea unor probleme dificile, „isprăvile lui Hercule” pot fi uşor ocolite cu ajutorul acesteia. Iar satisfacţia nu va scădea! Găsirea unei soluţii ingenioase aduce bucurie.

Ne propunem în prezenta lecţie să evidenţiem importanţa acestei noţiuni prin prisma unor probleme de concurs.

Definiţia simedianei. *Simetrica dreptei suport a unei mediane a unui triunghi faţă de dreapta suport a bisectoarei interioare din acelaşi vârf se numeşte simediană a triunghiului.*



Să considerăm triunghiul ABC, în care punctul M este mijlocul laturii (BC) şi punctul L este piciorul bisectoarei unghiului $\sphericalangle BAC$. Dacă AD este simediană, rezultă imediat că $\sphericalangle LAD \equiv \sphericalangle LAM$ şi $\sphericalangle BAD \equiv \sphericalangle CAM$. Pentru că dreptele AD şi AM trec prin vârful A al triunghiului şi formează unghiuri congruente cu bisectoarea AL, spunem că ele sunt *izogonale*.

Deşi mediana este segment, în această lecţie vom trata izogonala ei (simediana) ca o dreaptă.

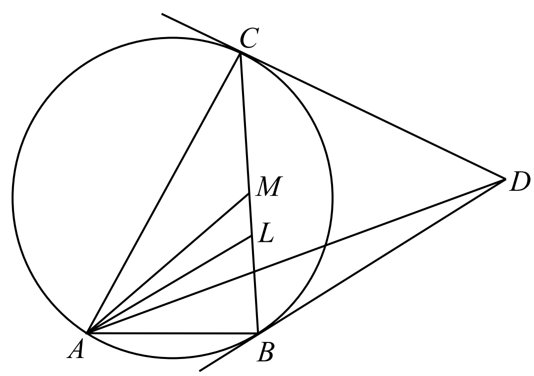
1) Asist. univ. drd., Universitatea „Politehnica“, Bucureşti.

Un triunghi are trei simediane, fiecare trecând prin câte un vârf. Acestea sunt concurente, iar punctul lor de intersecţie se numeşte *punctul simedian* al triunghiului şi se notează, de regulă, cu litera K. El mai poartă numele de *punctul lui Lemoine*, după matematicianul francez Émile Lemoine, care, în 1873, la întâlnirea Asociaţiei Franceze pentru Progres în Ştiinţă, a supus atenţiei auditoriului proprietăţile acestui punct din geometria triunghiului. Mai spunem că punctul lui *Lemoine* şi centrul de greutate sunt *puncte izogonale*, deoarece ele se găsesc la intersecţia simedianelor, respectiv la intersecţia izogonalelor acestora din urmă. Mai multe rezultate pe marginea acestui subiect găsiţi în [1].

În continuare ne vom axa pe următorul rezultat, căruia îi vom sublinia aplicabilitatea:

Teorema de concurenţă. *Simediana dusă printr-un vârf al unui triunghi trece prin punctul de intersecţie a tangentelor în celelalte două vârfuri, la cercul circumscris triunghiului.*

Să considerăm triunghiul ABC şi $\mathcal{C}$, cercul său circumscris. Dacă tangentele în punctele B şi C la cercul $\mathcal{C}$ se intersectează în punctul D, atunci AD este simediană a triunghiului ABC.



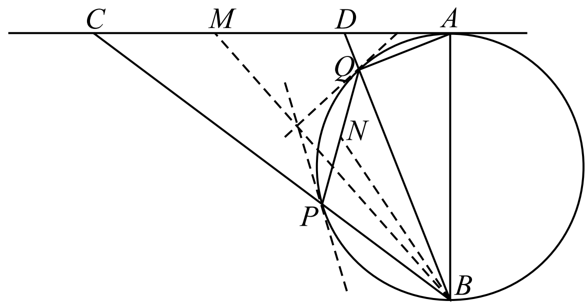
În [3] sunt prezentate trei demonstraţii ale acestei teoreme.

Să evidenţiem importanţa acestui rezultat cu următoarea problemă:

Problema 1. *Punctele C, M, D şi A sunt situate pe dreapta l, în această ordine, cu $CM = MD$. Cercul ω este tangent la dreapta d în punctul A. Fie punctul B pe cercul ω, diametral opus faţă de punctul A. Dacă dreptele BC şi BD intersectează a doua oară cercul ω în punctele P, respectiv Q, arătaţi că dreptele tangente la cercul ω în punctele P şi Q şi dreapta BM sunt concurente.*

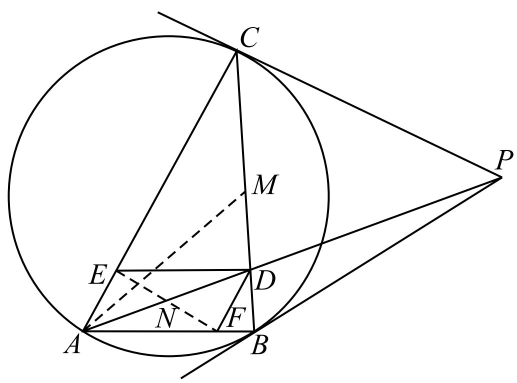
Soluţie. Deoarece patrulaterul $AQPB$ este inscriptibil, $\mathrm{m}(\sphericalangle BPQ) = 180^\circ - \mathrm{m}(\sphericalangle BAQ) = 180^\circ - [90^\circ - \mathrm{m}(\sphericalangle ABQ)] = 90^\circ + \mathrm{m}(\sphericalangle ABQ)$, deoarece unghiul $\sphericalangle BQA$ este drept (fiind înscris în semicerc). Ţinând cont că cercul

ω este tangent la dreapta d, deducem că $m(\sphericalangle BAD) = 90°$ şi, atunci, unghiul exterior $\sphericalangle BDC$ va avea măsura egală cu $90° + \mathrm{m}(\sphericalangle ABQ)$.



Aşadar, $\mathrm{m}(\sphericalangle BPQ) = \mathrm{m}(\sphericalangle BDC)$, de unde rezultă că PQ este antiparalelă cu DC în $\triangle BCD$, deci $\triangle BPQ \sim \triangle BDC$. Cum punctele M şi N sunt mijloacele bazelor acestor două triunghiuri, rezultă imediat că şi $\triangle BNQ \sim \triangle BMC$, de unde deducem congruenţa $\sphericalangle MBC \equiv \sphericalangle NBQ$, deci BM este simediană a triunghiului BQP. În baza teoremei rezultă concurenţa celor trei drepte din enunţ.

Problema 2. *Tangentele în vârfurile B şi C, ale triunghiului ABC, la cercul său circumscris se intersectează în punctul P. Dreptele AP şi BC se intersectează în punctul D. Punctele E şi F aparţin laturilor (AC), respectiv (AB), astfel încât $DE \parallel AB$ şi $DF \parallel AC$. Arătaţi că punctele B, F, E şi C sunt conciclice.*

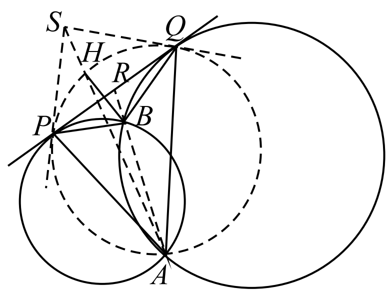


Soluţie. Conform teoremei de concurenţă, AP este simediană a triunghiului ABC. Patrulaterul $AFDE$ este paralelogram şi atunci, punctul $\{N\} = EF \cap AD$ este mijlocul segmentului (FE). Să considerăm şi punctul M, mijlocul laturii (BC). Teorema sinusurilor, aplicată în triunghiurile ANF şi ANE, ne asigură că $\dfrac{AF}{\sin ANF} = \dfrac{FN}{\sin FAN}$ şi $\dfrac{AE}{\sin ANE} = \dfrac{NE}{\sin NAE}$.

Ţinând cont că unghiurile $\sphericalangle ANF$ şi $\sphericalangle ANE$ au acelaşi sinus (sunt suplementare) şi $NF = NE$, aceste ultime relaţii ne conduc la $\dfrac{AF}{AE} = \dfrac{\sin CAD}{\sin BAD}$. În aceeaşi manieră stabilim că $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{\sin CAM}{\sin BAM}$. Deoarece AP este simediană, AM şi AP sunt izogonale, adică $m(\sphericalangle BAM) = m(\sphericalangle CAD)$ şi $m(\sphericalangle BAD) = m(\sphericalangle CAM)$. Rezultă că $\dfrac{AF}{AE} = \dfrac{AC}{AB}$, de unde $AF \cdot AB = AE \cdot AC$, ceea ce ne asigură conciclicitatea punctelor B, F, E şi C (produsul $AF \cdot AB$ reprezintă puterea punctului A faţă de cercul circumscris patrulaterului $BFEC$).

Problema 3. *În plan, două cercuri se intersectează în punctele A şi B, iar o tangentă comună a celor două cercuri le intersectează pe acestea în punctele P şi Q. Dacă tangentele în punctele P şi Q la cercul circumscris triunghiului APQ se intersectează în punctul S, iar punctul H este simetricul punctului B faţă de dreapta PQ, arătaţi că punctele A, S şi H sunt coliniare.*

Test de selecţie, Vietnam, 2001



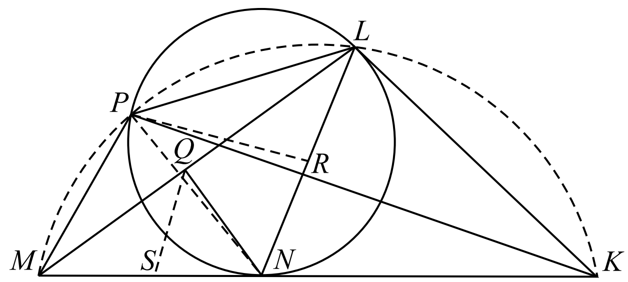
Soluţie. Vom trata cazul în care $d(B, PQ) < d(A, PQ)$, celălalt caz tratându-se similar. Privind tangentele la cercul circumscris triunghiului APQ, conform teoremei de concurenţă deducem că AS este simediană a triunghiului APQ. Considerăm punctul R, intersecţia dreptelor AB şi PQ. Deoarece dreptele RP şi RQ sunt tangente celor două cercuri, scriem puterea punctului R faţă de cele două cercuri astfel: $RB \cdot RA = RP^2$, respectiv $RB \cdot RA = RQ^2$. Prin urmare, $RP = RQ$, iar punctul R este mijlocul laturii (PQ). Astfel, triunghiul APQ are mediana AR şi simediana AS.

Deoarece punctele B şi H sunt simetrice faţă de dreapta PQ, avem că $m(\sphericalangle PHQ) = m(\sphericalangle PBQ) = 180° - m(\sphericalangle BPQ) - m(\sphericalangle BQP)$.

Deoarece dreapta PQ este tangentă la fiecare din cercurile iniţiale, $m(\sphericalangle BPQ) = \dfrac{m(\overset{\frown}{BP})}{2} = m(\sphericalangle PAB)$ şi $m(\sphericalangle BQP) = \dfrac{m(\overset{\frown}{BQ})}{2} = m(\sphericalangle BAQ)$. Aşadar, $m(\sphericalangle PHQ) = 180° - m(\sphericalangle PAB) - m(\sphericalangle BAQ) = 180° - m(\sphericalangle PAQ)$, ceea ce denotă inscriptibilitatea patrulaterului $APHQ$. Acest ultim fapt dă startul congruenţelor $\sphericalangle HAQ \equiv \sphericalangle QPH \equiv \sphericalangle BPQ \equiv \sphericalangle PAR$. Privind primul şi ultimul termen, deducem că AH este simediană a triunghiului APQ, adică punctele A, H şi S sunt coliniare.

Problema 4. *Din punctul K, exterior cercului $\mathcal{C}$, construim tangentele la acesta, KL şi KN. Fie M un punct oarecare pe semidreapta $(KN$, astfel încât punctele M şi K sunt situate de o parte şi de alta a punctului N. Dacă cercul circumscris triunghiului KLM intersectează a doua oară cercul $\mathcal{C}$ în punctul P şi punctul Q este proiecţia punctului N pe dreapta ML, arătaţi că* $m(\sphericalangle MPQ) = 2m(\sphericalangle KML)$.

Olimpiadă Iran, 1997



Soluţie. Tangentele din punctul K la cercul $\mathcal{C}$ ne conduc la faptul că PK este simediană a triunghiului PLN. Considerând punctul R, mijlocul laturii (LN), avem că $\sphericalangle LPK \equiv \sphericalangle RPN$. Cum $\mathrm{m}(\sphericalangle NPM) = \mathrm{m}(\sphericalangle LPM) - \mathrm{m}(\sphericalangle LPN) = [180^\circ - \mathrm{m}(\sphericalangle LKM)] - \dfrac{\mathrm{m}(\widehat{LN})}{2}$ (deoarece patrulaterul $KLPM$ este inscriptibil şi unghiul $\sphericalangle LPN$ subîntinde arcul $\widehat{LN}$) iar dreptele KL şi KN sunt tangente la cercul $\mathcal{C}$, rezultă că $\mathrm{m}(\sphericalangle NPM) = 180^\circ - \mathrm{m}(\sphericalangle LKM) - \mathrm{m}(\sphericalangle KLN) = \mathrm{m}(\sphericalangle LNK) = \mathrm{m}(\sphericalangle LPN)$. Acest ultim rezultat, combinat cu relaţia $\sphericalangle PNM \equiv \sphericalangle PLN$, ne oferă asemănarea $\triangle NPM \sim \triangle LPN$. Mergând pe o idee utilizată în rezolvarea primei probleme, considerăm punctele S şi R, mijloacele laturilor (NM), respectiv (NL), şi vom avea asemănarea $\triangle PRN \sim \triangle PSM$. Atunci $\sphericalangle RPN \equiv \sphericalangle SPM$ şi, ţinând cont de cele stabilite mai sus, obţinem că $\sphericalangle LPK \equiv \sphericalangle SPM$. Triunghiul NQM fiind dreptunghic, mediana (QS) ne conduce la congruenţele $\sphericalangle SQM \equiv \sphericalangle SMQ \equiv \sphericalangle LPK \equiv \sphericalangle SPM$, ceea ce implică inscripitibilitatea patrulaterului $SQPM$. Atunci $\mathrm{m}(\sphericalangle MPQ) = 180^\circ - \mathrm{m}(\sphericalangle MSQ) = 2 \cdot \mathrm{m}(\sphericalangle KML)$.

Pentru aprofundarea ideilor prezentului articol, propunem spre rezolvare următoarele probleme:

Problema 5. *Fie triunghiul isoscel ABC, cu $CA = CB$. Punctul P este interior triunghiului ABC şi are proprietatea că $\sphericalangle PAB \equiv \sphericalangle PBC$. Arătaţi că* $\mathrm{m}(\sphericalangle APM) + \mathrm{m}(\sphericalangle BPC) = 180^\circ$.

Olimpiadă Polonia, 2000

Problema 6. *Fie triunghiul ABC şi punctul I, centrul cercului său înscris. Dacă punctul U este mijlocul arcului BAC al cercului circumscris triunghiului ABC, arătaţi că IU este simediană a triunghiului IBC.*

Problema 7. *Fie $ABCD$ un patrulater convex, astfel încât $BC = CD$ şi* $2 \cdot \mathrm{m}(\sphericalangle A) + \mathrm{m}(\sphericalangle C) = 180^\circ$. *Dacă punctul M este mijlocul segmentului (BD), arătaţi că $\sphericalangle MAD \equiv \sphericalangle BAC$.*

Dinu Şerbănescu, Mathematical Reflections, 1/2006

Problema 8. *Fie ABC un triunghi şi Γ cercul său înscris. A', B', C' sunt punctele de tangenţă ale cercului Γ cu dreptele BC, CA, respectiv AB. Dacă punctul T este intersecţia dreptelor BC şi $C'B'$ iar punctul Q este al* *doilea punct de intersecţie a dreptei AA' cu cercul Γ, arătaţi că dreapta TQ este tangentă la cercul Γ.*

Problema 9. *În triunghiul ABC, punctele M şi N sunt mijloacele laturilor (BC), respectiv (CA). Punctul P este interior triunghiului, astfel încât $\sphericalangle BAP \equiv \sphericalangle PCA \equiv \sphericalangle MAC$. Arătaţi că $\sphericalangle PNA \equiv \sphericalangle AMB$.*

Olimpiadă Ucraina, 2000

Problema 10. *Triunghiul ABC este încris în cercul ω. Tangentele în punctele B şi C la cercul ω se intersectează în punctul T. Punctul S aparţine dreptei BC, astfel încât $SA \perp AT$. Punctele B_1 şi C_1 sunt situate pe dreapta ST (C_1 între B_1 şi S), astfel încât $TB_1 = TC_1 = TB$. Arătaţi că triunghiurile ABC şi AC_1B_1 sunt asemenea.*

Test de selecţie, USA, 2007

Bibliografie

[1] Nathan Altshiller Court, *College Geometry*, Barnes & Noble, New York, 1965.
[2] Dinu Şerbănescu, *Problema J6*, Mathematical Refections nr. 1/2006.
[3] Yufei Zhao, *Three Lemmas in Geometry*, `http://yufeizhao.com/`.
[4] `http://artofproblemsolving.com/`.

APLICAŢII ALE POLINOAMELOR CICLOTOMICE ÎN REZOLVAREA PROBLEMELOR DE TEORIA NUMERELOR

OVIDIU BUICĂ[1)]

Prezentul articol îşi propune să prezinte câteva proprietăţi aritmetice ale polinoamelor ciclotomice, dar mai ales modul în care aceste proprietăţi pot interveni în rezolvarea unor probleme. Pentru mai multe detalii referitoare la aceste proprietăţi poate fi consultată bibliografia indicată.

Definiţie. *Polinomul*

$$\Phi_n = \prod_{\substack{\xi^n=1,\\ \mathrm{ord}(\xi)=n}} (X - \xi),\ \ n \in \mathbb{N}^*$$

se numeşte al n-lea polinom ciclotomic.

Sunt cunoscute următoarele proprietăţi.

1) grad $\Phi_n = \varphi(n)$ (φ – indicatorul lui *Euler*).

2) Φ_n are coeficienţi întregi.

3) Φ_n este ireductibil peste $\mathbb{Q}$.

4) Dacă $n \in \mathbb{N}, n > 1$, atunci $\Phi_n(1) = p$ dacă $n = p^k$, cu p şi $k \in \mathbb{N}^*$ şi $\Phi_n(1) = 1$, în rest.

5) Dacă $n \in \mathbb{N}, n > 1$, atunci $\Phi_n(0) = 1$.

1) Profesor, Liceul Teoretic „Alexandru Mocioni", Ciacova, jud. Timiş