GAZETA MATEMATICĂ

SERIA B

PUBLICAŢIE LUNARĂ PENTRU TINERET

Fondată în anul 1895

Anul CXVIII nr. 5 **mai 2013**

ARTICOLE ŞI NOTE MATEMATICE

O GENERALIZARE A ECUAŢIEI FUNCŢIONALE $f(3^x)+f(4^x)=x$

Marcel Chiriţă[1)]

Abstract. The object of this note is the study of the continuous solutions of the functional equation $f(a^x)+f(b^x)=mx+n$.

Keywords: functional equation, continuous solution

MSC : 39B22

Fie $a>1, b>1, a\neq b$ şi $m,n\in\mathbb{R}$, $m\neq 0$. Obiectul acestei note este determinarea funcţiilor continue $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, pentru care

$$f\left(a^x\right)+f\left(b^x\right)=mx+n,\ x\in\mathbb{R}. \tag{$*$}$$

Ecuaţia se mai poate scrie

$$f((ab)^{x\log_{ab}a})+f((ab)^{x\log_{ab}b})=mx+n.$$

Presupunem că $a>b$. Notăm $\log_{ab}a=c$ şi din $\log_{ab}ab=1$ rezultă $\log_{ab}b=1-c>0$. Din $a>b$ reiese $\log_{ab}a>\log_{ab}b$, deci $c>1-c$.

Notăm $d=\dfrac{1-c}{c}\in(0,1)$ şi definim $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ prin

$$h(t)=\frac{f\left((ab)^t\right)-\dfrac{n}{2}}{m},\ t\in\mathbb{R}.$$

Obţinem succesiv

$$mh\left(x\log_{ab}a\right)+\frac{n}{2}+mh\left(x\log_{ab}b\right)+\frac{n}{2}=mx+n,\quad x\in\mathbb{R},$$

$$mh\left(cx\right)+\frac{n}{2}+mh\left((1-c)x\right)+\frac{n}{2}=mx+n,\quad x\in\mathbb{R},$$

$$h\left(cx\right)+h\left((1-c)\,x\right)=x,\quad x\in\mathbb{R}. \tag{1}$$

---

1) Profesor, Bucureşti.

Ecuaţia (1) admite soluţia $h(x) = x$.

Facem substituţia $h(x) = \varphi(x) + x$, unde $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şi obţinem

$$\varphi(cx) + \varphi((1-c)x) = 0, \tag{2}$$

de unde $|\varphi(cx)| = |\varphi((1-c)x)|$, deci, înlocuind cx cu x, $|\varphi(x)| = \left|\varphi\left(\frac{1-c}{c}x\right)\right|$, adică $|\varphi(x)| = |\varphi(dx)|$. Obţinem prin iterare

$$|\varphi(x)| = |\varphi(dx)| = |\varphi(d^2x)| = \ldots = |\varphi(d^nx)|, \text{ oricare ar fi } n \in \mathbb{N}^*. \tag{3}$$

Deoarece f este continuă, h este şi ea continuă, deci φ este continuă şi, trecând la limită după n şi ţinând cont că $d \in (0,1)$, rezultă

$$|\varphi(x)| = |\varphi(0)|, \; x \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

Din (2) avem $\varphi(0) + \varphi(0) = 0$, deci $\varphi(0) = 0$. (5)

Din (4) şi (5) obţinem $\varphi(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$. (6)

Din (2) şi (6) obţinem $h(x) = x$, deci $f((ab)^t) - \frac{n}{2} = mt, t \in \mathbb{R}$, de unde

$$f(x) = m\log_{ab} x + \frac{n}{2}, \qquad x \in (0,\infty).$$

În final există o singură funcţie, anume cea aflată mai sus, care verifică ecuaţia funcţională $(*)$.

Observaţii.

1. În cazul $m = 0$, definind funcţia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ prin $g(t) = f\left((ab)^t\right) - \frac{n}{2}$ obţinem, ca mai sus, $g = 0$, de unde $f(x) \equiv \frac{n}{2}$. Aşadar, rezultatul precedent este valabil şi în cazul $m = 0$.

2. Rezultatul rămâne valabil şi dacă înlocuim condiţia $a > 1$, $b > 1$, $a \neq b$ cu $a > 0$, $b > 0$, $ab \neq 1$, raţionamentul rămânând, în esenţă, acelaşi.

3. În cazul $ab = 1$, ipoteza nu mai oferă informaţii decât despre valorile funcţiei în perechile de puncte de forma $\left(t, \frac{1}{t}\right)$. În acest caz rezultă

$$f(x) = \begin{cases} g(x), & x \geq 1 \\ n - m\log_a x - g\left(\frac{1}{x}\right), & x \in (0,1), \end{cases}$$

unde $a > 1$ şi $g : [1,\infty) \to \mathbb{R}$ este o funcţie continuă oarecare.

Bibliografie

[1] V. Pop, *Ecuaţii funcţionale*, Editura Mediamira Cluj-Napoca, 2002, pag. 64, 150-151.

[2] *Concursul anual al revistei Gazeta Matematică pe anul 1998*, Gazeta Matematică 10/1998, pag. 383.