PENTRU CERCURILE DE ELEVI

STABILIREA UNOR INEGALITĂŢI INTEGRALE CU AJUTORUL UNOR FUNCŢII AUXILIARE

Marius Mâinea[1)] şi Manuela Prajea[2)]

În acest articol vom prezenta o metodă de demonstrare sau de stabilire a unor inegalităţi integrale folosind inegalitatea *Cauchy-Buniakovski-Schwarz* (CBS), combinată cu considerarea unor integrale auxiliare din functii polinomiale şi apoi particularizând valorile coeficienţilor polinoamelor respective. Vom aplica această metodă unor probleme propuse la diverse olimpiade

[1)] Profesor, Colegiul National „Vladimir Streinu", Găeşti
[2)] Profesor dr., Colegiul Naţional „Traian" Drobeta Turnu Severin

naţionale, concursuri naţionale şi internaţionale pentru elevi şi studenţi, în reviste de specialitate naţionale sau internaţionale.

Punctul de plecare este o problemă dată la O.N.M. în anul 2004.

Problema 1. *Fie* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ *o funcţie integrabilă cu proprietatea*

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x = 1.$$

Demonstraţi că $\displaystyle\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x \geq 4.$

Ioan Raşa, O.N.M. 2004

Soluţia 1. Din condiţiile ipotezei rezultă că pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$, avem

$$\int_0^1 f(x)(ax+b)\mathrm{d}x = a\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x + b\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = a + b,$$

apoi cu CBS

$$(a+b)^2 = \left(\int_0^1 f(x)(ax+b)\mathrm{d}x\right)^2 \leq \left(\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x\right)\left(\int_0^1 (ax+b)^2\mathrm{d}x\right).$$

Pentru $b = 1$ se obţine inegalitatea $\displaystyle\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x \geq \frac{3(a+1)^2}{a^2+3a+3}$, adevărată pentru orice $a \in \mathbb{R}$. Mai departe analizând comportamentul expresiei din membrul drept, deducem că aceasta ia valoarea maximă pentru $a = -3$, iar această valoare maximă este 4, aşa cum se cere.

Interesant este şi cazul de egalitate, care apare atunci când inegalitatea CBS folosită are loc cu egalitate, deci când există $\lambda \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$\frac{f(x)}{-3x+1} = \lambda \Leftrightarrow f(x) = \lambda(-3x+1).$$

Dar integrala funcţiei f este egală cu unitatea, deci $\lambda = -2$, de unde $f(x) = 6x - 2$. Aici funcţia auxiliară este de gradul întâi, dar există generalizări de grad superior. p

Soluţia a 2*-a.* Căutăm $P(x) = ax + b$ care să verifice ipoteza problemei, adică $\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x = 1$, ceea ce conduce la $P(x) = 6x - 2$. Atunci

$$0 \leq \int_0^1 (f(x) - P(x))^2\mathrm{d}x = \int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x - \int_0^1 f(x)P(x)\mathrm{d}x - \int_0^1 P(x)(f(x) - P(x))\mathrm{d}x.$$

Cum ultimul termen este 0 obţinem $\int\limits_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x \geq \int\limits_0^1 P(x)f(x)\mathrm{d}x = 4.$

Să îmbogăţim ipoteza în continuare, păstrând aproximativ concluzia.

Problema 2. *Fie* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ *o funcţie integrabilă cu proprietatea*

$$\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 xf(x)\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 x^2 f(x)\mathrm{d}x = 1.$$

Demonstraţi că $\int\limits_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x \geq 9.$

Joseph Wildt Contest 2005

Soluţia 1. La fel ca la prima problemă, căutăm $P(x) = ax^2 + bx + c$ astfel încât să verifice condiţiile din ipoteză şi obţinem $P(x) = 30x^2 - 24x + 3$. Atunci în acelaşi mod $\int\limits_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x \geq \int\limits_0^1 P(x)f(x)\mathrm{d}x = 9.$

Soluţia a 2*-a.* Din inegalitatea CBS

$$\int\limits_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x \geq \frac{\left(\int\limits_0^1 (10x^2 - 8x + 1)f(x)\mathrm{d}x\right)^2}{\int\limits_0^1 (10x^2 - 8x + 1)^2\mathrm{d}x} = 9.$$

Generalizarea naturală care se impune după parcurgerea acestor probleme este următoarea.

Problema 3. *Fie* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ *o funcţie integrabilă cu proprietatea*

$$\int\limits_0^1 x^k f(x)\mathrm{d}x = 1,\ \forall\, k = \overline{1, n-1}.$$

Demonstraţi că $\int\limits_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x \geq n^2.$

A.M.M. nr. 10/2006 şi SEEMOUS 2008

Soluţie. Procedăm în acelaşi mod, căutând polinomul P de grad $n-1$ care să verifice condiţiile lui f, $P(x) = \sum\limits_{j=0}^{n-1} a_j x^j$. Atunci

$$1=\int_0^1 x^i P(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\sum_{j=0}^{n-1}a_jx^{i+j}=\sum_{j=0}^{n-1}\frac{a_j}{i+j+1},\ \forall\, i=\overline{1,n-1},$$

$$\int_0^1 P^2(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\sum_{i,j=0}^{n-1}a_ia_jx^{i+j}\mathrm{d}x=\sum_{i,j=0}^{n-1}\frac{a_ia_j}{i+j+1}=\sum_{i=0}^{n-1}a_i\sum_{j=0}^{n-1}\frac{a_j}{i+j+1}=\sum_{i=0}^{n-1}a_i$$

şi

$$\int_0^1 P(x)f(x)\mathrm{d}x=\sum_{j=0}^{n-1}a_j\int_0^1 x^jf(x)\mathrm{d}x=\sum_{j=0}^{n-1}a_j.$$

La fel ca la problemele 1 şi 2,

$$\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x\geq\int_0^1 P(x)f(x)\mathrm{d}x=\sum_{i=0}^{n-1}a_i$$

şi rămâne să arăm că $\sum\limits_{i=0}^{n-1}a_i=n^2$. Pentru aceasta fie $r(x)=\sum\limits_{j=0}^{n-1}\dfrac{a_j}{j+x+1}-1$, care se anulează pentru $x=\overline{0,n-1}$. Atunci polinomul monic de grad n

$$(x+1)(x+2)\dots(x+n)-\sum_{j=0}^{n-1}a_j(x+1)\dots(\widehat{x+j+1})\dots(x+n)$$

este egal cu $x(x-1)\dots(x-n+1)$. Egalând coeficienţii lui x^{n-1} obţinem

$$1+2+\ldots+n-\sum_{j=0}^{n-1}a_j=-(1+2+\ldots+n-1)$$

adică $\sum\limits_{j=0}^{n-1}a_j=n^2$ q.e.d.

Observaţie. Se poate arăta că $a_i=(-1)^{n-i-1}C_{n-1}^i(i+1)(i+2)\dots(i+n)$.

În condiţii asemănătoare se pot deduce minorări şi pentru integrala pătratului derivatei unei funcţii.

Problema 4. *Fie $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ o funcţie derivabilă, cu derivata continuă şi cu proprietatea*

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x=1.$$

Demonstraţi că $\int\limits_0^1 \left(f'(x)\right)^2 \mathrm{d}x \geq 30.$

Cezar Lupu şi *Tudorel Lupu*, O.N.M. 2005

Soluţie. Fie a şi b numere reale. Atunci

$$\int\limits_0^1 \left(ax^2+bx\right)^2 \mathrm{d}x \int\limits_0^1 \left(f'(x)\right)^2 \mathrm{d}x \geq \Big(\int\limits_0^1 \left(ax^2+bx\right) f'(x)\mathrm{d}x\Big)^2 =$$

$$= \Big(f(x)(ax^2+bx)\Big|_0^1 - \int\limits_0^1 (2ax+b)f(x)\Big)^2 = ((a+b)f(1)-2a-b)^2 .$$

Luăm $a+b=0$ şi obţinem

$$\int\limits_0^1 a^2x^2(x-1)^2 \int\limits_0^1 \left(f'(x)\right)^2 \mathrm{d}x \geq a^2 \ \text{ sau } \int\limits_0^1 \left(f'(x)\right)^2 \mathrm{d}x \geq \frac{1}{\frac{1}{5}-\frac{2}{4}+\frac{1}{3}} = 30.$$

Egalitatea are loc când $f'(x) = \lambda a(x-1)x, \lambda \in \mathbb{R}$, adică $f(x) = \frac{kx^3}{3} - \frac{kx^2}{2} + p$, k şi p numere reale, de unde rezolvând sistemul ce rezultă din condiţiile iniţiale obţinem $k = -\frac{30}{11}$ şi $p = \frac{37}{22}$.

Problema 5. *Fie* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ *o funcţie continuă. Demonstraţi că*

$$\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x \int\limits_0^1 x^4 f(x)\mathrm{d}x \leq \frac{4}{15} \int\limits_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x.$$

Dorian Popa şi *Ioan Raşa*, O.N.M. 2006

Soluţie. Observăm că

$$\left(\int\limits_0^1 (ax^4+b)f(x)\mathrm{d}x\right)^2 = \left(\int\limits_0^1 ax^4 f(x)\mathrm{d}x\right)^2 + 2ab\int\limits_0^1 x^4 f(x)\mathrm{d}x \int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x +$$

$$+ \left(\int\limits_0^1 bf(x)\mathrm{d}x\right)^2 \geq 4ab\int\limits_0^1 x^4 f(x)\mathrm{d}x \int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x$$

şi, conform inegalităţii CBS

$$\left(\int\limits_0^1 (ax^4+b)f(x)\mathrm{d}x\right)^2 \leq \int\limits_0^1 (ax^4+b)^2\mathrm{d}x \int\limits_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x,$$

pentru orice numere reale a, b. Considerând $b = 1$ şi $a > 0$ număr real oarecare rezultă $\int_0^1 x^4 f(x)\mathrm{d}x \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \leq \dfrac{\dfrac{a^2}{9} + \dfrac{2a}{5} + 1}{4a} \int_0^1 f^2(x)$.

Cum $\dfrac{a}{36} + \dfrac{1}{4a} \geq 2\sqrt{\dfrac{a}{36} \cdot \dfrac{1}{4a}} = \dfrac{1}{6}$, minimul expresiei $\dfrac{a}{36} + \dfrac{1}{10} + \dfrac{1}{4a}$ este chiar $\dfrac{4}{15}$. Egalitatea se obţine pentru $a = 3$ şi $f(x) = \lambda(3x^4 + 1), \lambda \in \mathbb{R}$.

Problema 6. *Fie $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă. Demonstraţi că*

$$\frac{1}{4}\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x + 2\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^2 \geq 3\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x.$$

Cezar Lupu, O.N.M. 2006

Soluţie. Căutăm a real astfel încât

$$\frac{1}{4}\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x + (2 + 3a)\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^2 \geq 3\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \int_0^1 (x + a)f(x)\mathrm{d}x.$$

Notând $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = y$ obţinem trinomul de gradul II în y

$$(2 + 3a)y^2 - 3y\int_0^1 (x + a)f(x)\mathrm{d}x + \frac{1}{4}\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x \geq 0, \qquad (*)$$

care are discriminantul $\Delta = 9\left(\int_0^1 (x + a)f(x)\mathrm{d}x\right)^2 - (2 + 3a)\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x$ şi, conform CBS,

$$\Delta \leq 9\int_0^1 (x + a)^2\mathrm{d}x \int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x - (2 + 3a)\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x =$$

$$= \left[9\frac{(x + a)^3}{3}\Big|_0^1 - 2 - 3a\right]\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x = (1 + 3a)^2\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x.$$

Se observă că pentru $a = -\dfrac{1}{3}, \Delta \leq 0$, aşadar inegalitatea $(*)$ are loc pentru orice y real. Înlocuind $a = -13$ se obţine concluzia problemei. Egalitatea are loc dacă $f(x) = \lambda\left(x - \dfrac{1}{3}\right), \lambda \in \mathbb{R}$.

Problema 7. *Fie* $f,g:[p,q]\to\mathbb{R}$ *două funcţii integrabile astfel încât* $\int\limits_p^q f(x)g(x)\mathrm{d}x=0$. *Demonstraţi că*

$$\int\limits_p^q f^2(x)\mathrm{d}x\int\limits_p^q g^2(x)\mathrm{d}x\geq 4\left(\int\limits_p^q f(x)\mathrm{d}x\int\limits_p^q g(x)\mathrm{d}x\right)^2.$$

C. Lupu şi *T. Lupu*, A.M.M. şi Concursul Arhimede 2007

Soluţie. Fie a, b numere reale. Conform inegalităţii CBS

$$\left(\int\limits_p^q (a+f(x))(b+g(x))\mathrm{d}x\right)^2\leq\int\limits_p^q (a+f(x))^2\mathrm{d}x\int\limits_p^q (b+g(x))^2\mathrm{d}x.$$

Luând $b=0$, a real obţinem

$$a^2\int\limits_p^q g^2(x)\mathrm{d}x\leq a^2\int\limits_p^q g^2(x)+2a\int\limits_p^q f(x)\int\limits_p^q g^2(x)\mathrm{d}x+\int\limits_p^q f^2(x)\mathrm{d}x\int\limits_p^q g^2(x)\mathrm{d}x$$

sau

$$0\leq a^2\Big(\int\limits_p^q g^2(x)\mathrm{d}x-\Big(\int\limits_p^q g(x)\mathrm{d}x\Big)^2\Big)+2a\int\limits_p^q f(x)\mathrm{d}x\int\limits_p^q g^2(x)\mathrm{d}x+\int\limits_p^q f^2(x)\mathrm{d}x\int\limits_p^q g^2(x)\mathrm{d}x,$$

ceea ce impune ca discriminantul trinomului de gradul II în a să fie nepozitiv:

$$\Big(\int\limits_p^q f(x)\mathrm{d}x\Big)^2\Big(\int\limits_p^q g^2(x)\mathrm{d}x\Big)^2\leq\Big(\int\limits_p^q g^2(x)\mathrm{d}x-\Big(\int\limits_p^q g(x)\mathrm{d}x\Big)^2\Big)\int\limits_p^q f^2(x)\mathrm{d}x\int\limits_p^q g^2(x)\mathrm{d}x.$$

Prin simplificare cu $\int\limits_p^q g^2(x)\mathrm{d}x>0$ (în caz contrar, g este funcţia nulă şi inegalitatea este imediată) rezultă

$$\left(\int\limits_p^q f(x)\mathrm{d}x\right)^2\int\limits_p^q g^2(x)\mathrm{d}x\leq\int\limits_p^q f^2(x)\mathrm{d}x\int\limits_p^q g^2(x)\mathrm{d}x-\left(\int\limits_p^q g(x)\mathrm{d}x\right)^2\int\limits_p^q f^2(x)\mathrm{d}x.$$

Obţinem

$$\int\limits_p^q f^2(x)\mathrm{d}x\int\limits_p^q g^2(x)\mathrm{d}x\geq\int\limits_p^q f^2(x)\mathrm{d}x\left(\int\limits_p^q g(x)\mathrm{d}x\right)^2+\int\limits_p^q g^2(x)\mathrm{d}x\left(\int\limits_p^q f(x)\mathrm{d}x\right)^2$$

şi, ridicând la pătrat şi aplicând inegalitatea mediilor pentru numere rezultă concluzia.

Observaţie. Luând $p=-1,q=1$ $g(x)=x^2$ obţinem particularizarea:

Fie $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ *o funcţie continuă astfel încât* $\int\limits_{-1}^{1} x^2 f(x)\mathrm{d}x = 0$. *Atunci* $\int\limits_{-1}^{1} f^2(x)\mathrm{d}x \geq \frac{10}{9}\left(\int\limits_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x\right)^2$.

Problema 8. *Să se determine funcţiile* $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ *de clasă* C^1 *astfel încât* $f(1) = -\frac{1}{6}$ *şi* $\int\limits_0^1 (f'(x))^2\mathrm{d}x \leq 2\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

Radu Gologan, O.N.M. 2009

Soluţie. Să căutăm a număr real astfel încât

$$0 \leq \int\limits_0^1 (f'(x) + ax)^2\mathrm{d}x \leq 0. \qquad (*)$$

Aceasta se reduce la

$$\int\limits_0^1 \left(f'(x)\right)^2 \mathrm{d}x + 2a\int\limits_0^1 xf'(x)\mathrm{d}x + a^2\int\limits_0^1 x^2\mathrm{d}x \leq 0.$$

Integrând prin părţi şi folosind ipoteza

$$\int\limits_0^1 \left(f'(x)\right)^2 \mathrm{d}x + 2a\left(-\frac{1}{6}\right) - 2a\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x + \frac{a^2}{3} \leq 0$$

de unde deducem că $a = 1$ Relaţia $(*)$ conduce la egalitate adică $f'(x) \equiv -x$. De aici $f(x) \equiv -\frac{x^2}{2}+b$ şi cu condiţia din ipoteză $b = \frac{1}{3}$, deci $f(x) \equiv -\frac{x^2}{2}+\frac{1}{3}$.

Probleme propuse

1. Fie $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ o funcţie derivabilă, cu derivata continuă astfel încât $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$. Demonstraţi că $\int\limits_0^1 \left(f'(x)\right)^2 \mathrm{d}x \geq 12\left(\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^2$.

Cezar Lupu, O.N.M. 2008

2. Fie $f : [1, \mathrm{e}] \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă cu proprietatea că

$$\int\limits_1^{\mathrm{e}} f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_1^{\mathrm{e}} f(x)\ln x \; \mathrm{d}x = 1.$$

Demonstraţi că $\int\limits_1^{\mathrm{e}} (f(\mathrm{e}^x))^2 \, \mathrm{d}x \geq 4\mathrm{e}^{-2}$.

Cristinel Mortici

3. Considerăm $n \in \mathbb{N}^*$ şi $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă cu proprietatea că $\int\limits_0^1 (1 - x^n) \, f(x)\mathrm{d}x = 0$. Să se arate că

$$\int\limits_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x \geq (2n+1) \left(\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x \right)^2 .$$

Dorian Popa, Concursul Grigore Moisil, 2008