# PROBLEME PENTRU EXAMENE NAŢIONALE[1)]

## Clasa a VII-a

**1.** Calculaţi $D_{12} \cap D_{18}$, unde $D_n$ înseamnă mulţimea divizorilor naturali ai lui $n$.

**2.** Aflaţi $x$ pentru care fracţia $\dfrac{3x+1}{13}$ este echiunitară.

**3.** Calculaţi $|3\sqrt{5} - 5\sqrt{3}|$.

**4.** Aflaţi media aritmetică şi media geometrică a numerelor $a = 6+2\sqrt{3}$ şi $b = 6 - 2\sqrt{3}$.

**5.** Un triunghi echilateral are înălţimea egală cu $4\sqrt{3}$ cm. Aflaţi perimetrul triunghiului.

**6.** Presupunem că $\triangle ABC \sim \triangle MNP$. Dacă perimetrul triunghiului $ABC$ este egal cu 15 cm şi $\dfrac{AB}{MN} = 3$, aflaţi perimetrul triunghiului $MNP$.

## Clasa a VIII-a

**7.** Determinaţi funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + 3$, ştiind că reprezentarea ei grafică formează cu axa $Ox$ un unghi cu măsura de $60^0$.

**8.** Mihai a cheltuit 30% din suma de bani pe care o avea, adică 420 de lei. Ce sumă de bani avea Mihai?

**9.** Exprimaţi în procente „3 elevi dintre cei 24 ai clasei a VIII-a A sunt corigenţi".

**10.** Unul dintre unghiurile ascuţite ale unui trapez isoscel are măsura de $80^0$. Care este suma măsurilor unghiurilor obtuze ale trapezului?

**11.** Ce lungime are raza cercului circumscris unui triunghi echilateral cu latura de 9 cm?

**12.** Raportul ariilor a două tetraedre regulate este $\dfrac{4}{9}$. Aflaţi raportul volumelor celor două tetraedre.

---

[1)] La problemele din această rubrică nu se primesc soluţii. (N.R.)

## Clasa a IX-a

**13.** Să se determine minimul funcţiei $f : [2, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x^2 - x - 6$.

**14.** Să se arate că $4\left(x^3 + y^3\right) \geq 1$, oricare ar fi numerele reale pozitive $x$ şi $y$ având suma egală cu 1.

**15.** Să se arate că $3 \sin x + 4 \cos x \leq 5$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

**16.** Să se calculeze $\sin 2\alpha$, ştiind că $\mathrm{tg}\alpha = \dfrac{3}{4}$.

**17.** Să se calculeze $\sin 10° + \sin 20° + \sin 30° + \ldots + \sin 180°$.

**18.** Să se rezolve în $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ ecuaţia $\sin^6 x + \cos^6 x = \dfrac{1}{4}$.

## Clasa a X-a

**19.** Să se rezolve ecuaţia $3^x = 2^x + 1$.

**20.** Să se rezolve ecuaţia $\log_2(x - 3) = \log_3(x - 2)$.

**21.** Să se determine numărul elementelor mulţimii:

$$[0, 8\pi) \cap \left\{(-1)^k \arcsin \frac{\pi}{5} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

**22.** Să se determine cel mai mic element

$$a \in \left\{\pm \arccos \frac{\pi}{10} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\},$$

care verifică $a > 19\pi$.

**23.** Câte triplete de numere întregi $(a, b, c)$ verifică $a^2 + b^2 + c^2 = 384$ ?

**24.** Câte nulţimi ordonate $(x, y, z, t)$ de numere naturale verifică

$$xyzt = 128\,?$$

## Clasa a XI-a

**25.** Fie $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă cu proprietatea că $f(0) = f(2)$. Considerăm funcţia $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x + 1) - f(x)$.

a) Să se calculeze $g(0) + g(1)$.

b) Să se arate că funcţia $g$ se anulează.

c) Să se demonstreze că există un segment $AB$ de lungime 1, paralel cu axa $Ox$, având capetele $A$ şi $B$ pe graficul funcţie $f$.

**26.** Considerăm sistemul liniar

$$\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = 1 \\ x + y + bz = b \end{cases}, \quad \text{cu } a, b \in \mathbb{R}.$$

a) Să se calculeze determinantul sistemului.

b) Să se rezolve sistemul pentru $a = 1$ şi $b \neq 1$.

c) Să se rezolve sistemul pentru $a \neq 1$ şi $b = 1$.

## Clasa a XII-a

**27.** Considerăm şirul $I_n = \int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} \mathrm{ctg} x^n \mathrm{d}x$, $n \geq 1$.

a) Să se calculeze $I_1$.

b) Să se arate că şirul $(I_n)_{n\geq 1}$ este convergent.

c) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} I_n$.

**28.** Fie polinomul $f = X^3 + 3X^2 + aX + b \in \mathbb{R}[X]$ cu rădăcinile sale $x_1$, $x_2$, $x_3$.

Să se determine valorile reale ale lui $a$ şi $b$ pentru care:

a) $x_1 = x_2 = x_3$;

b) $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 3$;

c) restul împărţirii lui $f$ la $X^2 + X + 1$ este egal cu $2X - 1$.