GAZETA MATEMATICĂ

SERIA B

PUBLICAŢIE LUNARĂ PENTRU TINERET

Fondată în anul 1895

Anul CXVIII nr. 3 **martie 2013**

ARTICOLE ŞI NOTE MATEMATICE

SUBSERII DIVERGENTE CU ACEIAŞI INDICI

Gheorghe Stoica[1)]

Abstract. We characterize the situation where the subseries with common index set, drawn from all divergent series, diverge as well.

Keywords: subseries, boundedness conditions

MSC : 40A05

Să considerăm seria armonică $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ (despre care se ştie că este divergentă) şi o subserie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k_n}$ a ei, unde $(k_n)_{n\geq 1}$ este un şir de numere naturale astfel încât $(k_n)_n \nearrow +\infty$. O condiţie suficientă pentru divergenţa subseriei $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k_n}$ este existenţa unei constante $C > 0$ astfel încât $k_n \leq Cn$ pentru orice $n \geq 1$ (conform criteriului majorării). Condiţia de mai sus nu este necesară: putem considera subseria divergentă $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k_n}$ a seriei armonice, unde k_n este al n-lea număr prim; în acest caz, $k_n \sim n \ln n$ când $n \to +\infty$.

Inspiraţi de cele de mai sus, ne putem pune întrebarea dacă există o legătură între şirul $\left(\frac{k_n}{n}\right)_{n\geq 1}$ şi divergenţa subseriilor $\sum_{n=1}^{\infty} x_{k_n}$ asociate seriilor divergente $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$. Un răspuns posibil este dat de rezultatul de mai jos, în care divergenţa subseriilor **cu aceiaşi indici** $(k_n)_{n\geq 1}$, ale **tuturor** seriilor

[1)]Professor, University of New Brunswick, Saint John, Canada divergente, este echivalentă cu mărginirea superioară a şirului $\left(\frac{k_n}{n}\right)_{n\geq 1}$. Mai precis, vom demonstra următoarea

Teoremă. *Fie $(k_n)_{n\geq 1}$ un şir crescător de numere naturale. Următoarele afirmaţii sunt echivalente*:

(1) *Există $C>0$ astfel incât $k_n \leq Cn$ pentru orice $n\geq 1$.*

(2) *Pentru orice serie divergentă $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$, cu $(x_n)_n \searrow 0$, subseria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_{k_n}$ este divergentă.*

Demonstraţie. Să arătăm că (1) $\Rightarrow$ (2). Considerăm o serie divergentă $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ cu $(x_n)_n \searrow 0$, precum şi o subserie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_{k_n}$ a sa. Conform ipotezei, există $p\in\mathbb{N}^*$ (de exemplu, $p=[C]+1$, unde $[C]$ este partea întreagă a lui C) astfel încât $k_n \leq pn$, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$. Rezultă $x_{k_n}\geq x_{pn}$, pentru orice $n\geq 1$. Dar seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_{pn}$ este divergentă (a se vedea [1]). Ca urmare, conform criteriului comparaţiei, seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_{k_n}$ este divergentă.

Să arătăm că (2) $\Rightarrow$ (1). Presupunem prin reducere la absurd că (1) nu este adevărată, ceea ce implică $\limsup\limits_{n\to+\infty}\frac{k_n}{n}=+\infty$. Vom construi o serie divergentă $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$, cu $(x_n)_n \searrow 0$, precum şi o subserie convergentă $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_{k_n}$ a ei.

Fie $n_0=0$; la primul pas alegem $n_1\geq 1$ astfel încât $\frac{k_{n_1}-k_{n_0}}{n_1-n_0}>1$, unde $k_0=0$. La pasul $i+1$ vom alege $n_{i+1}>n_i$ astfel încât $\frac{k_{n_{i+1}}-k_{n_i}}{n_{i+1}-n_i}>2^i$ pentru $i=0,1,\ldots$.

Pentru fiecare $i=0,1,2,\ldots$ definim $x_j=\frac{1}{2^i(n_{i+1}-n_i)}$ pentru $k_{n_i}+1\leq$ $\leq j\leq k_{n_{i+1}}$.

Şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este descrescător către 0 şi pentru fiecare $i=1,2,\ldots$ avem:

$$\sum_{j=k_{n_i}+1}^{k_{n_{i+1}}} x_j = \sum_{j=k_{n_i}+1}^{k_{n_{i+1}}} \frac{1}{2^i(n_{i+1}-n_i)} = \frac{k_{n_{i+1}}-k_{n_i}}{2^i(n_{i+1}-n_i)} \geq 1.$$

Sumând după „blocurile" k_{n_i}, obţinem că seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ este divergentă.

Pe de altă parte, pentru fiecare $i=1,2,\ldots$ avem

$$\sum_{j=n_i+1}^{n_{i+1}} x_{k_j} = \sum_{j=n_i+1}^{n_{i+1}} \frac{1}{2^i(n_{i+1}-n_i)} = \frac{1}{2^i},$$

şi, sumând după blocurile n_i, obţinem că subseria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_{k_n}$ este convergentă.

Demonstraţia este completă.

Remarcă. Dacă eliminăm condiţia $(x_n)_n \searrow 0$ din afirmaţia (2) din Teoremă, problema devine trivială. Într-adevăr, fie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ o serie oarecare cu $x_n > 0$ pentru orice $n \geq 1$. Dacă 0 nu este punct limită al şirului $(x_n)_{n\geq 1}$, atunci toate subseriile asociate seriei date sunt divergente (cf. [2]).

În încheiere, considerăm util pentru cititori să mediteze la rezultatul din acest articol în raport cu literatura de specialitate, de exemplu:

(a) Fie $(k_n)_{n\geq 1}$ un şir de numere naturale astfel încât $(k_n) \nearrow +\infty$ când $n \to +\infty$. Atunci $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k_n} = \infty$ dacă şi numai dacă $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{M(n)}{n^2} = \infty$, unde $M(n) = \text{card}\{i \mid k_i \leq n\}$ (cf. [1]). Nu cunoaştem o caracterizare similară a divergenţei subseriilor pentru alte serii diferite de seria armonică.

(b) Fie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ o serie divergentă, cu $x_n > 0$ pentru orice $n \geq 1$. Atunci există o mulţime nenumărabilă de subserii divergente ale seriei date. În plus, dacă $(x_n)_n \searrow 0$, atunci există o mulţime nenumărabilă de subserii convergente ale seriei date (cf. [2]). În sensul teoriei măsurii şi al teoriei categoriilor, „aproape toate" subseriile unui serii divergente sunt divergente (cf. [3]).

Privitor la cardinalul subseriilor convergente, se pot consulta lucrările [1], [4] şi [5].

BIBLIOGRAFIE

[1] D. Licoiu, E. Păltănea, *Subserii convergente cu sumă comună ale unei serii divergente*, Gazeta Matematică Seria B, nr. 11/2011, 499–503.

[2] G. Pólya, G. Szegő, *Problems and theorems in analysis.* Vol. l, Springer-Verlag, Berlin, 1998.

[3] M.B. Rao, K.P.S.B. Rao, B.V. Rao, *Remarks on subsequences, subseries and rearrangements*, Proceedings of the American Mathematical Society, Vol. 67, No. 2/1977, pp. 293–296.

[4] G. Stoica, *Asupra unor subserii ale unei serii divergente*, Gazeta Matematică Seria B, nr. 4/2009, 169–172.

[5] A. Vernescu, *Asupra unor subserii ale seriei armonice*, Gazeta Matematică Seria B, nr. 2/2006, 59–62.