$L$ un subcorp al lui $A$ cu $x \in L$; avem $|L| = p^t$, $1 < t < n$. Cum $(L^*, \cdot)$ este grup de ordin $p^t - 1$ şi $x \in L^*$, rezultă $x^{p^t-1} = 1$.

Din relaţia $1 + x^{p-1} + x^{p^2-1} + \cdots + x^{p^n-1} = 0$ rezultă $x + x^p + x^{p^2} + \ldots + x^{p^{n-1}} = 0$, de unde $\left(x + x^p + \ldots + x^{p^{n-1}}\right)^p = 0$. Cum inelul are caracteristica $p$, ultima egalitate devine $x^p + x^{p^2} + \ldots + x^{p^n} = 0$, deci $x = -\left(x^p + x^{p^2} + \ldots + x^{p^n-1}\right) = x^{p^n}$. Cum $x$ este inversabil în $A$, avem $x^{p^n-1} = 1$.

Din $(p^n - 1, p^t - 1) = p^{(n,t)} - 1 = p - 1$, rezultă că există $a, b \in \mathbb{Z}$ cu $p - 1 = a(p^n - 1) + b(p^t - 1)$. Atunci:

$$x^{p-1} = x^{a(p^n-1)+b(p^t-1)} = \left(x^{p^n-1}\right)^a \left(x^{p^t-1}\right)^b = 1,$$

deci $0 = 1 + x^{p-1} + x^{p^2-1} + \ldots + x^{p^n-1} = \underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{\text{de } n \text{ ori}} = n$, adică $p \mid n$.

Cum $n \neq p$ şi $n$ este prim, obţinem o contradicţie. În consecinţă, dacă $A$ nu este corp, atunci $K$ este unicul subcorp al său, iar dacă $A$ este corp, atunci $K$ şi $A$ sunt subcorpurile sale.

**26648.** *Fie $p$ un mumăr prim de forma $4k + 3$ şi $n$ un număr natural impar. Considerăm $K$ corpul cu $p^n$ elemente. Să se arate că fiecare element $a \in K$ se poate scrie sub forma $x^4 + y^4$, cu $x, y \in K$.*

*Gabriela Burghelea*, Bucureşti

*Soluţie.* Fie funcţia $f : K^* \to K^*$, $f(x) = x^4$. Dacă $f(x) = f(y)$, atunci $x^4 - y^4 = 0$, de unde $x^2 = y^2$ sau $x^2 = -y^2$. Dacă $x^2 = -y^2$, avem $\left(xy^{-1}\right)^2 = -1$, de unde $\left(\left(xy^{-1}\right)^2\right)^{2k+1} = (-1)^{2k+1} = -1$, deci $\left(xy^{-1}\right)^{p-1} = -1$.

Cum $\left(xy^{-1}\right)^{p-1} = 1$, rezultă $1 = -1$, fals, deoarece $K$ are caracteristica $p > 2$. În concluzie $f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = \pm y$, iar $y = -y$, $\forall\, y \in K^*$. Deducem că $\mathrm{Im} f = \frac{1}{2}|K^*| = \frac{p^n - 1}{2}$, deci mulţimea $A = \left\{x^4 \mid x \in K\right\} = \{0\} \cup \mathrm{Im} f$ are $\frac{p^n + 1}{2}$ elemente.

Fie $a \in K$. Mulţimile $A$ şi $a - A = \left\{a - x^4 \mid x \in K\right\}$ au câte $\frac{p^n + 1}{2}$ elemente, prin urmare nu sunt disjuncte, deoarece $A \cup (a - A) \subset K$ şi $|K| = p^n$. Fie $z = A \cap (a - A)$; există $x, y \in K$ astfel ca $z = x^4$ şi $z = a - y^4$, de unde $a = x^4 + y^4$, ceea ce trebuia demonstrat.

## PROBLEME PENTRU EXAMENE NAŢIONALE[1)]

### Clasa a VII-a

**1.** Dacă $\frac{a}{5} = \frac{3}{b}$, calculaţi $4ab$.

**2.** Ştiind că $a = 1{,}(2)$ şi $b = \frac{5}{3}$, aflaţi media aritmetică a numerelor $a$ şi $b$.

---

1) La problemele din această rubrică nu se primesc soluţii. (N.R.)

**3.** Într-o urnă sunt 45 de bile numerotate de la 1 la 45. Care este probabilitatea ca extrăgând o bilă pe ea să fie scris un număr divizibil cu 7?

**4.** În patrulaterul $ABCD$ avem $AB = AD$ şi $CB = CD$. Aflaţi aria patrulaterului, ştiind că $AC = 4$ cm şi $BD = 10$ cm.

**5.** Se ştie că $\triangle ABC \sim \triangle MNP$ şi $\frac{AB}{MN} = \frac{2}{3}$. Dacă perimetrul triunghiului $ABC$ este egal cu 30 cm, aflaţi perimetrul triunghiului $MNP$.

**6.** Aflaţi aria unui trapez în care linia mijlocie are lungimea de 6 cm şi înălţimea trapezului este de 8 cm.

## Clasa a VIII-a

**7.** Ştiind că $\frac{x}{12} = \frac{75}{y}$, calculaţi media geometrică a numerelor $x$ şi $y$.

**8.** Determinaţi numărul real $m$, ştiind că punctul $P(2,5)$ aparţine graficului funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = mx + 7$.

**9.** Descompuneţi în factori $x^4 + x^2 + 1$.

**10.** Fie $ABCD$ un tetraedru în care $AB = AD$ şi $CB = CD$. Care este măsura unghiului dintre dreptele $AC$ şi $BD$?

**11.** Un cub are aria totală egală cu 24 cm$^2$. Aflaţi lungimea diagonalei cubului.

**12.** Fie $ABCDA'B'C'D'$ un paralelipiped dreptunghic în care $AB = 6$ cm, $BC = 8$ cm şi $AA' = 5$ cm. Aflaţi măsura unghiului dintre planele $(C'BD)$ şi $(ABC)$.

## Clasa a IX-a

**13.** Să se determine numărul termenilor supraunitari ai progresiei geometrice $(a_n)_{n\geq 1}$ cu $a_1 = 2013$ şi raţia $r = 1/2$.

**14.** Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ o progresie aritmetică. Pentru fiecare număr $m \geq 1$, notăm $S_m = a_1 + a_2 + \cdots + a_m$. Ştiind că $S_{10} = S_{20}$, să se calculeze $S_{30}$.

**15.** Să se arate că numărul $4^n + 15n - 1$ este multiplu al lui 9, pentru orice număr natural $n$.

**16.** Să se arate că $2^{n+2} > 2n + 5$ pentru orice număr natural $n \geq 1$.

**17.** Fie $ABCD$ un patrulater şi fie $O$ punctul de intersecţie a diagonalelor. Să se arate că dacă $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{O}$, atunci $ABCD$ este paralelogram.

**18.** Fie $ABC$ un triunghi echilateral înscris într-un cerc de centru $O$ şi rază 2. Să se calculeze modulul vectorului $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$.

## Clasa a X-a

**19.** Să se rezolve ecuaţia $\sqrt[3]{2^x + 3^x} - \sqrt[3]{5} = 0$.

**20.** Să se rezolve ecuaţia $\sqrt{x} + \sqrt{5 - x} = 3$.

**21.** Să se rezolve ecuaţia $\sqrt{\sqrt{2} + x} - \sqrt{\sqrt{2} - x} = x\sqrt{2}$.

**22.** Să se determine inversa funcţiei $f:(1,\infty)\to[2,\infty)$ definită prin $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$.

**23.** Să se arate că funcţia $f:\mathbb{N}\to\mathbb{Z}$, $f(n)=(-1)^n\left[\dfrac{n}{2}\right]$ este inversabilă.

**24.** Să se arate că funcţia $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, $f(n)=[n\sqrt{3}]-[n\sqrt{2}]$ este surjectivă.

## Clasa a XI-a

**25.** Fie matricea $V(a,b,c)=\begin{pmatrix} a & b & c\\ b & c & a\\ c & a & b\end{pmatrix}$, unde $a$, $b$, $c$ sunt numere reale.

a) Să se calculeze $\det(V(1,2,3))$.

b) Să se arate că $\det(V(a,b,c))=\det(V(c,b,a))$, oricare ar fi numerele reale $a$, $b$, $c$.

c) Să se determine numerele reale $a$, $b$, $c$ pentru care

$$V(a,b,c)V(1,2,3)=V(1,0,0).$$

**26.** Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definită prin $f(x)=x\left[\dfrac{1}{x}\right]$ pentru $x\neq 0$ şi $f(0)=1$.

a) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

b) Să se arate că $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)$.

c) Să se calculeze limitele laterale ale funcţiei $f$ în punctele de abscisă $x=\dfrac{1}{n}$, $n\in\mathbb{Z}^*$.

## Clasa a XII-a

**27.** Fie mulţimea $L=\left\{\begin{pmatrix} a+b & b\\ b & a-b\end{pmatrix}\mid a,b\in\mathbb{Q}^*\right\}$.

a) Să se arate că $\det(A)\neq 0$, oricare ar fi $A\in L$.

b) Să se arate că $L$ este parte stabilă a mulţimii matricelor pătratice de ordin 2 în raport cu scăderea şi înmulţirea matricelor.

c) Să se arate că $(L,+,\cdot)$ este corp comutativ.

**28.** Pentru fiecare număr real $a$ considerăm $I_a=\displaystyle\int_0^{\pi} x\cos ax\,\mathrm{d}x$.

a) Să se calculeze $I_1$.

b) Să se calculeze $\lim\limits_{a\to 0} I_a$.

c) Să se arate că $\lim\limits_{a\to\infty} I_a=0$.