## REFERENCES

[1] B. Venkatachala, *Functional Equations. A Problem Solving Approach*, Prism Books, Bangalore, India 2002, p.88-90.
[2] A. Neguţ, *Problems for the Mathematical Olympiads*, GIL Publishing House, Romania 2005.
[3] www.artofproblemsolving.com


# PENTRU CERCURILE DE ELEVI

## ÎN LEGĂTURĂ CU PROBLEMA 26590

VASILE BERGHEA[1)]

În Gazeta Matematică nr. 3/2012 a apărut problema 26590 cu un enunţ eronat, datorat unei greşeli de redactare:

*Să se arate că ecuaţia* $3x^6 - 9x^5 + 18x^4 - 21x^3 + 15x^2 - 6x + 1 = 0$ *are trei rădăcini* $a, b, c \in \mathbb{C}$ *cu proprietatea* $|a| + |c| = 3 + |b|$.

Nota de faţă corectează cerinţa şi prezintă o demonstraţie a acesteia: relaţia ce trebuie dovedită este $|a| + |c| = \sqrt{3} + |b|$.

Ideea rezolvării este să aflăm efectiv soluţiile ecuaţiei date şi să arătăm că ele îndeplinesc cerinţa.

Într-adevăr, cu substituţia $y = \dfrac{1}{x} - 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{1+y}$, ecuaţia dată devine

$$y^6 - y^3 + 1 = 0. \tag{1}$$

Punând $y^3 = t$ vom găsi $t^2 - t + 1 = 0$, cu rădăcinile $t_{1,2} = \cos 60^\circ \pm$ $\pm \mathrm{i} \sin 60^\circ$. Deducem că rădăcinile ecuaţiei (1) sunt

$$y_k = \cos\left(20^\circ + k \cdot 120^\circ\right) + \mathrm{i}\sin\left(20^\circ + k \cdot 120^\circ\right), \quad k \in \{0, 1, 2\}$$

şi conjugatele lor,

$$\overline{y}_k = \cos\left(20^\circ + k \cdot 120^\circ\right) - \mathrm{i}\sin\left(20^\circ + k \cdot 120^\circ\right), \quad k \in \{0, 1, 2\}.$$

Putem afla acum rădăcinile ecuaţiei din enunţ. Folosind notaţia $\alpha = 10^\circ + k \cdot 60^\circ$ avem rădăcinile

$$\begin{aligned} x_k &= \frac{1}{1+y_k} = \frac{1}{1 + \cos 2\alpha + \mathrm{i}\sin 2\alpha} = \frac{1}{2\cos^2\alpha + 2\mathrm{i}\sin\alpha\cos\alpha} = \\ &= \frac{1}{2\cos\alpha\left(\cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha\right)} = \frac{\cos\alpha - \mathrm{i}\sin\alpha}{2\cos\alpha} = \frac{1}{2} - \frac{\mathrm{i}}{2}\mathrm{tg}\alpha = \\ &= \frac{1}{2} - \frac{\mathrm{i}}{2}\mathrm{tg}\left(10^\circ + k \cdot 60^\circ\right), \quad k \in \{0, 1, 2\} \end{aligned}$$

[1)] Profesor, Liceul teoretic „Gh. Lazăr", Avrig şi, bineînţeles, conjugatele lor. Obţinem astfel

$$|x_0| = \frac{1}{2\cos 10^\circ}, |x_1| = \frac{1}{2\cos 70^\circ}, |x_2| = \frac{1}{2\,|\cos 130^\circ|} = \frac{1}{2\cos 50^\circ}.$$

Alegem $a = x_1, b = x_0, c = x_2$ şi verificăm că $|x_1| + |x_2| = \sqrt{3} + |x_0|$, care este echivalentă cu $\dfrac{1}{2\cos 70^\circ} + \dfrac{1}{2\cos 50^\circ} = \sqrt{3} + \dfrac{1}{2\cos 10^\circ}$, sau

$$\frac{1}{\cos 70^\circ} + \frac{1}{\cos 50^\circ} - \frac{1}{\cos 10^\circ} = 2\sqrt{3}. \tag{2}$$

Mai întâi observăm că

$$\cos 70^\circ = \cos 60^\circ \cos 10^\circ - \sin 60^\circ \sin 10^\circ = \frac{1}{2}\left(\cos 10^\circ - \sqrt{3}\sin 10^\circ\right)$$
$$\cos 50^\circ = \cos 60^\circ \cos 10^\circ + \sin 60^\circ \sin 10^\circ = \frac{1}{2}\left(\cos 10^\circ + \sqrt{3}\sin 10^\circ\right).$$

Numitorul comun pentru membrul stâng este

$$\begin{aligned}\cos 70^\circ \cos 50^\circ \cos 10^\circ &= \frac{1}{4}\left(\cos^2 10^\circ - 3\sin^2 10^\circ\right)\cos 10^\circ \\ &= \frac{1}{4}\left(4\cos^2 10^\circ - 3\right)\cos 10^\circ = \frac{1}{4}\cos 30^\circ\end{aligned}$$

Avem de asemenea $\cos 70^\circ + \cos 50^\circ = 2\cos 60^\circ \cos 10^\circ = \cos 10^\circ$.

Eliminând numitorul în (2) şi folosind rezultatele stabilite mai sus avem de verificat $(\cos 70^\circ + \cos 50^\circ)\cos 10^\circ - \cos 70^\circ \cos 50^\circ = 2\sqrt{3}\cdot\dfrac{1}{4}\cos 30^\circ$, sau $\cos^2 10^\circ - \dfrac{1}{4}\left(4\cos^2 10^\circ - 3\right) = 2\sqrt{3}\cdot\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, egalitate evidentă şi cerinţa este dovedită.

**Remarcă.** Rezolvarea dată în numărul 9/2012 corectează relaţia din cerinţă, înlocuind-o cu $|a|^2+|b|^2+|c|^2 = 3$. O altă abordare a acestei concluzii decât cea apărută în rezolvarea din Gazetă este următoarea: din cele de mai sus rezultă

$$\begin{aligned}|x_0|^2 + |x_1|^2 + |x_2|^2 &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\cos^2 10^\circ} + \frac{1}{2\cos^2 70^\circ} + \frac{1}{2\cos^2 130^\circ}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+\cos 20^\circ} + \frac{1}{1+\cos 140^\circ} + \frac{1}{1+\cos 260^\circ}\right).\end{aligned}$$

Observăm că $20^\circ, 140^\circ, 260^\circ$ sunt soluţii ale ecuaţiei $\cos 3a = \cos 60^\circ$, deci $\cos 20^\circ, \cos 140^\circ, \cos 260^\circ$ sunt soluţii ale ecuaţiei

$$4z^3 - 3z = \frac{1}{2}.$$

Cum numerele $z_1 = \cos 20^\circ, z_2 = \cos 140^\circ, z_3 = \cos 260^\circ$sunt distincte, reiese că ele sunt cele trei rădăcini ale acestei ecuaţii. Folosind relaţiile *Viète* obţinem

$$\sum \frac{1}{1+z_1} = \frac{3 + 2\sum z_1 + \sum z_1 z_2}{1 + \sum z_1 + \sum z_1 z_2 + z_1 z_2 z_3} = \frac{3 - \dfrac{3}{4}}{1 - \dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{8}} = 6,$$

de unde $|x_0|^2 + |x_1|^2 + |x_2|^2 = 3$.

### References

[1] Gazeta Matematică Seria B, nr.3/2012.
[2] Gazeta Matematică Seria B, nr.9/2012.

# EXAMENE ŞI CONCURSURI

## CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ „MEMORIALUL ŞTEFAN DÂRŢU”
## Ediţia a XIV-a, Vatra Dornei, 14-16 decembrie 2012

prezentare de Mihai Ţarcă [1)] şi Octavian Rezuş [2)]

În perioada 14-16 decembrie 2012, la Liceul Teoretic „Ion Luca” din Vatra Dornei, s-a desfăşurat cea de a XIV-a ediţie a Concursului Interjudeţean de Matematică „Memorialul Ştefan Dârţu”, organizat de catedra de matematică din liceu, în colaborare cu Inspectoratul Şcolar Judeţean Suceava, Consiliul Judeţean Suceava şi Primăria Municipiului Vatra Dornei.

Preşedintele concursului a fost profesorul universitar doctor *Vasile Berinde*, de la Universitatea de Nord Baia Mare. La acest concurs au participat un număr de 268 de elevi din clasele IV-XII din judeţele Bistriţa-Năsăsăud, Botoşani, Iaşi, Neamţ, Suceava.

Prezentăm în continuare enunţurile problemelor şi lista premianţilor.

### Clasa a IV-a

**1.** Radu, Bogdan şi Maria au împreună suma de 350 de lei. Suma pe care o au Radu şi Bogdan împreună este de patru ori mai mare decât suma pe care o are Maria. Dacă Radu i-ar da lui Bogdan 20 de lei, atunci Radu şi Bogdan ar avea sume egale. Ce sumă a avut fiecare copil?

Gazeta Matematică

**2.** a) Câte numere de trei cifre au toate cifrele pare? Justificaţi!

b) Dar impare? Justificaţi!

c) Împăratul Mincinoşilor, din Împărăţia Uriaşilor, are înălţimea de 254 cm, iar nasul său are lungimea de 6 cm. După fiecare minciună, lungimea nasului său se măreşte de trei ori şi cu încă 7 cm. Aflaţi cel mai mic număr de

1) Profesor, Liceul Teoretic „Ion Luca“
2) Profesor, Liceul Teoretic „Ion Luca“