PROBLEME PROPUSE

PROBLEME PENTRU EXAMENE NAŢIONALE[1)]

Clasa a VII-a

1. Calculaţi: $\dfrac{2}{13}+\dfrac{55}{4}:\dfrac{65}{4}$.

2. Aflaţi preţul fără TVA al unui produs, ştiind că preţul cu TVA este de 31 de lei (TVA-ul este 24%).

3. Comparaţi numerele $a=12\sqrt{3}$ şi $b=15\sqrt{2}$.

[1)] La problemele din această rubrică nu se primesc soluţii. (N.R.)

4. Dacă G este centrul de greutate al unui triunghi ABC şi aria triunghiului ABG este egală cu 12 cm^2, aflaţi aria triunghiului ABC.

5. Într-un triunghi dreptunghic proiecţiile catetelor pe ipotenuză au lungimile 9 cm, respectiv 16 cm. Aflaţi perimetrul şi aria triunghiului.

6. Un triunghi isoscel are perimetrul egal cu 20 cm şi una dintre laturi de lungime 6 cm. Aflaţi aria triunghiului.

Clasa a VIII-a

7. Calculaţi $\sqrt{\left(1-\sqrt{3}\right)^2} - \sqrt{4+2\sqrt{3}}$.

8. Arătaţi că, dacă x este număr natural, atunci numărul

$$(x^2+4x+3)(x^2+4x+5)+1$$

este produsul a patru numere naturale mai mari ca 1.

9. Simplificaţi $\dfrac{x^3+4x}{x^5-16x}$.

10. În triunghiul dreptunghic ABC cateta AB are lungimea egală cu 15 cm, iar proiecţia catetei AC pe ipotenuză are lungimea egală cu 16 cm. Aflaţi perimetrul triunghiului.

11. În cubul $ABCDA'B'C'D'$ notăm M mijlocul lui $[AA']$ şi N mijlocul lui $[BC]$. Dacă $MN = 6\sqrt{6}$ cm, aflaţi lungimea diagonalei cubului.

12. Aflaţi lungimea înălţimii unei piramide patrulatere regulate în care muchia laterală are lungimea de 6 cm şi formează cu planul bazei un unghi cu măsura de $30°$.

Clasa a IX-a

13. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie cu proprietatea că $f(x) = f(2-x)$ şi $f(x-1) = f(5-x)$. Să se arate că funcţia f este pară.

14. Există funcţii $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cu proprietatea că $f(x) + f(2-x) = x$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$?

15. Numerele $1/16$, 2 şi 16 sunt termeni ai unei progresii geometice. Să se arate că 8 este termen al progresiei.

16. Şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este definit prin $a_1 = 1/2$ şi $a_{n+1} = a_n(1-a_n)$, $n \geq 1$. Să se arate că şirul este mărginit.

17. Considerăm hexagonul regulat $ABCDEF$ de latură 1. Să se calculeze modulul vectorului $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AF}$.

18 Fie $ABCD$ un patrulater şi M, N, P, Q mijloacele laturilor sale. Să se arate că $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CP} + \overrightarrow{DQ} = \overrightarrow{O}$.

Clasa a X-a

19. Să se ordoneze crescător numerele $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{6}$ şi $\sqrt[4]{72}$.

20. Să se arate că $\log_5 7 \notin \mathbb{Q}$.

21. Să se calculeze $\displaystyle\sum_{k=1}^{100} \log_2 \frac{k+2}{k}$.

22. Să se calculeze $(1+z_1^2)(1+z_2^2)(1+z_3^2)$, unde z_1, z_2, z_3 sunt rădăcinile cubice complexe ale unităţii.

23. Să se rezolve în mulţimea numerelor complexe ecuaţia $z^3 + \bar{z} = 0$.

24. Să se determine suma modulelor soluţiilor complexe ale ecuaţiei $z^4 = 9$.

Clasa a XI-a

25. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{3}{2}\right\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x+1}{2x+3}$.

a) Să se determine asimptotele graficului funcţiei f.

b) Să se calculeze limita şirului $(a_n)_{n\geq 1}$, unde $a_n = f(1)f(2)\cdots f(n)$.

c) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} 2^n f(1)f(2)\cdots f(n)$.

26. Pentru fiecare număr natural $n \geq 2$ definim matricea $A_n = (a_{ij})$ de ordin $n-1$ cu elementele $a_{ii} = 2+i$ şi $a_{ij} = 1$ pentru $i \neq j$.

a) Să se calculeze $\det(A_3)$.

b) Să se arate că $\det(A_n) = n\det(A_{n-1}) + (n-1)!$, $n \geq 2$.

c) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\det(A_n)}{n!}$.

Clasa a XII-a

27. Fie şirul $(I_n)_{n\geq 1}$, $I_n = \displaystyle\int_n^{n+1} \frac{2x-1}{x}\mathrm{d}x$.

a) Să se arate că şirul $(I_n)_{n\geq 1}$ este strict crescător.

b) Să se arate că şirul $(I_n)_{n\geq 1}$ este mărginit.

c) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} n\,(2 - I_n)$.

28. Pe mulţimea $G = (0,1)$ se defineşte operaţia $x*y = \dfrac{xy}{2xy - x - y + 1}$.

a) Verificaţi dacă $e = \dfrac{1}{2}$ este element neutru.

b) Să se arate că $(G,*)$ este grup.

c) Să se arate că funcţia $f : G \to \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = 1/x - 1$ este un izomorfism de la grupul $(G,*)$ la grupul $\left(\mathbb{R}_+^*, \cdot\right)$.