DESPRE PUNCTUL LUI TORRICELLI

Ion Safta [1)]

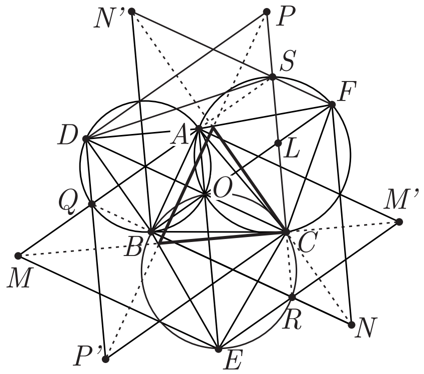
Abstract. This note points some extra properties of the *Torricelli* configuration.

Keywords: Torricelli point.
MSC : 51M04.

Este bine cunoscută teorema: *dacă în exteriorul unui triunghi* ABC *se construiesc triunghiurile echilaterale* ADB, BEC, CFA, *atunci segmentele* $[AE]$, $[BF]$, $[CD]$ *sunt congruente şi dreptele* AE, BF, CD *sunt concurente.* Punctul de concurenţă se numeşte punctul lui *Torricelli*.

Această notă îşi doreşte să evidenţieze şi alte proprietăţi ale configuraţiei de mai sus.

Notăm cu O intersecţia cercurilor $(\mathcal{C}_1)$, $(\mathcal{C}_2)$, $(\mathcal{C}_3)$, circumscrise triunghiurilor echilaterale ADB, BEC, CFA şi fie triunghiurile echilaterale AME, $AM'E$, BNF, $BN'F$, CPD, $CP'D$ (a se vedea figura).



Notăm $\{Q\} = AM \cap DP'$, $\{R\} = BN \cap EM'$ şi $\{S\} = CP \cap FN'$.

Propoziţia 1. $(\mathcal{C}_1)$ trece prin Q, $(\mathcal{C}_2)$ trece prin R, $(\mathcal{C}_3)$ trece prin S.

Demonstraţie. Fie Q' intersecţia lui $(AM$ cu cercul $(\mathcal{C}_1)$; demonstrăm că D, Q', P' sunt puncte coliniare.

În patrulaterele $ABQ'D$ şi $AOBD$ înscrise în cercul $(\mathcal{C}_1)$ avem:

$$\mathrm{m}(\sphericalangle BDQ') = \mathrm{m}(\sphericalangle BAQ') = v,\ \mathrm{m}(\sphericalangle OAB) = \mathrm{m}(\sphericalangle ODB) = u;$$

$$u + v = \mathrm{m}(\sphericalangle OAQ') = \mathrm{m}(\sphericalangle MAE) = 60^\circ \text{ } (AME \text{ este triunghi echilateral});$$

$$\mathrm{m}\left(\sphericalangle ODQ'\right) = u + v = 60^\circ. \tag{1}$$

În triunghiul echilateral CDP',

$$\mathrm{m}\left(\sphericalangle CDP'\right) = 60^\circ. \tag{2}$$

[1)] Profesor, Şcoala Gimnazială „Marin Preda", Piteşti

Din (1) şi (2) rezultă că semidreptele $[DQ'$ şi $[DP'$ sunt identice, deci D, Q', P' sunt puncte coliniare şi $Q' = Q \in (\mathcal{C}_1)$.

Analog se demonstrează că $R \in (\mathcal{C}_2)$ şi $S \in (\mathcal{C}_3)$.

Propoziţia 2. (A, Q, S), (B, R, Q) şi (C, S, R) sunt triplete de puncte coliniare.

Demonstraţie. În cercul $(\mathcal{C}_1)$, $m(\sphericalangle AOB) = 120°$ şi $m(\sphericalangle ABO) = 180° - 120° - u = 60° - u = v$ (a se vedea relaţia (1)). Dreptele AQ şi BF determină cu secanta AB unghiuri alterne interne congruente $\sphericalangle ABO$ şi $\sphericalangle BAQ$, deci dreptele AQ şi BF sunt paralele. În cercul $(\mathcal{C}_3)$, $m(\sphericalangle ASC) = m(\sphericalangle AFC) = 60°$; $\{L\} = CS \cap OF$; $m(\sphericalangle CLO) = 60°$. ($\Delta CDP$ este echilateral $\Rightarrow m(\sphericalangle OCL) = 60°$; $m(\sphericalangle COL) = m(\sphericalangle COF) = 60°$). Dreptele AS şi BF determină cu secanta SL unghiuri corespondente congruente $\sphericalangle ASC$ şi $\sphericalangle BLC$, deci dreptele AS şi BF sunt paralele. Din $AQ \parallel BF$ şi $AS \parallel BF$ rezultă că A, Q şi S sunt puncte coliniare.

Analog se demonstrează că (B, R, Q) şi (C, S, R) sunt triplete de puncte coliniare.

Propoziţia 3. Triunghiul SQR este echilateral şi are laturile paralele cu BF, CD, respectiv AE.

Demonstraţie. În ΔSQR, $m(\sphericalangle RSQ) = m(\sphericalangle ASC) = 60°$ (a se vedea propoziţia 2); $m(\sphericalangle SQR) = m(\sphericalangle AQB) = m(\sphericalangle ADB) = 60°$; $SQ \parallel BF$ (s-a demonstrat că $AQ \parallel BF$ şi $AS \parallel BF$).

Analog rezultă $QR \parallel CD$ şi $RS \parallel AE$.

Propoziţia 4. Dreptele MM', NN', PP' se taie două câte două în vârfurile unui triunghi echilateral.

Demonstraţie. Diagonalele romburilor $AMEM'$, $BNFN'$ şi $CPDP'$ sunt perpendiculare, deci $MM' \perp AE$, $NN' \perp BF$ şi $PP' \perp CD$.

Laturile triunghiului echilateral SQR sunt paralele cu BF, CD, AE (a se vedea propoziţia 3) şi MM', NN' şi PP' sunt perpendiculare pe AE, BF, CD, deci MM', NN', PP' sunt perpendiculare pe laturile triunghiului echilateral SQR. Rezultă că MM', NN', PP' fac între ele unghiuri de $60°$, deci intersecţiile lor sunt vârfurile unui triunghi echilateral.