şi $\int\limits_0^{1/2} f(x)\mathrm{d}x \le f\left(\frac{1}{2}\right)\cdot x^2\Big|_0^{1/2} = \frac{1}{4}f\left(\frac{1}{2}\right)$, deci $\int\limits_0^{1} f(x)\mathrm{d}x \ge 4\int\limits_0^{1/2} f(x)\mathrm{d}x$.

26774. *Fie $p \ge 2$ un număr prim. În inelul $(\mathbb{Z}_p, +, \cdot)$ definim şirul $(a_n)_{n\ge1}$ prin $a_n = \widehat{n}$ pentru $n = 0, 1, \ldots, p-1$ şi $a_n = a_{n-1} + a_{n-p}$, pentru $n = p, p+1, \ldots$ Să se arate că $a_n = a_{n+p^2-1}$ pentru orice $n = 0, 1, \ldots$*

George Stoica, Canada

Soluţie. Fie L o închidere algebrică a corpului $(\mathbb{Z}_p, +, \cdot)$. Deoarece polinomul caracteristic $f = X^p - X^{p-1} - \widehat{1}$ asociat recurenţei date are doar rădăcini simple (întrucât $f' \ne 0$), termenii şirului $(a_n)_{n\ge0}$ sunt daţi de o relaţie de forma $a_n = A_1 r_1^n + A_2 r_2^n + \ldots + A_p r_p^n$, unde $r_1, r_2, \ldots, r_p \in L$ sunt rădăcinile lui f şi $A_1, A_2, \ldots, A_p \in L$. Astfel, este suficient să arătăm că, dacă $r^p = r^{p-1} + 1$, $r \in L$, atunci $r^{p^2-1} = 1$. Într-adevăr, $(r-1)^p = r^p - 1 = r^{p-1}$, deci $(r-1)^{p+1} = r^{p-1}(r-1) = 1$. De aici rezultă $r^{p^2-1} = (r-1)^{p(p+1)} = 1$.

Observaţie. Valorile primilor p termeni ai şirului nu au nicio importanţă.

PROBLEME PROPUSE

PROBLEME PENTRU EXAMENE NAŢIONALE[1)]

Clasa a VII-a

1. Comparaţi numerele $-0{,}23$ şi $-\dfrac{7}{30}$.

2. Efectuaţi $\dfrac{1}{4} - 1{,}4 : 1{,}92 =$

3. Aflaţi cel mai mare număr întreg, mai mic decât $-1{,}23(4)$.

4. Fie $ABCD$ un pătrat cu latura de 1 cm. Dacă E este simetricul lui B faţă de C şi F este simetricul lui D faţă de C, aflaţi aria patrulaterului $BDEF$.

5. Triunghiul ABC are aria egală cu 27 cm^2. Dacă G este centrul de greutate al triunghiului, aflaţi aria triunghiului GBC.

6. În trapezul $ABCD$, $AB \parallel CD$ şi $BC = CD = DA$. Aflaţi măsura unghiului ACB.

Clasa a VIII-a

7. Dacă $a = \sqrt{2-\sqrt{3}}$ şi $b = \sqrt{2+\sqrt{3}}$ calculaţi $(a-b)^2$.

8. Scrieţi mulţimea $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \le 1 - x < 5\}$ sub formă de interval.

9. Dacă $a^2 + b^2 = 7$ şi $ab = 3$, calculaţi $|a-b|$.

[1)] La problemele din această rubrică nu se primesc soluţii. (N.R.)

10. Fie $ABCDA'B'C'D'$ un cub cu muchia de 10 cm. Aflaţi distanţa de la A la dreapta BD'.

11. Fie ABC un triunghi dreptunghic cu catetele $AB = 6$ cm şi $AC = 8$ cm, iar M un punct exterior planului (ABC). Ştiind că $MA = MB = MC = 13$ cm, aflaţi distanţa de la M la planul (ABC).

12. În paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$, triunghiul ACB' este echilateral. Arătaţi că $ABCDA'B'C'D'$ este cub.

Clasa a IX-a

13. Calculaţi $\left[\sqrt{10}\right] + \left[\sqrt{11}\right] + \ldots + \left[\sqrt{50}\right]$.

14. Daţi exemplu de numere reale x şi y cu $\{x\} + \{y\} = 1 + \{xy\}$.

15. Arătaţi că $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} \geq 9$, oricare ar fi $a, b, c \in (0, \infty)$.

16. Fie $x, y, z \in \mathbb{R}$ trei numere distincte. Simplificaţi

$$\frac{x^4(y-z) + y^4(z-x) + z^4(x-y)}{(z-y)(y-x)(x-z)}.$$

17. Fie şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ definit astfel: $a_1 = 3$ şi $a_{n+1} = 2a_n + 1$. Calculaţi a_{100}.

18. Arătaţi că şirul $x_n = 1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ este nemărginit.

Clasa a X-a

19. Comparaţi numerele $0,1^{0,2}$ şi $0,2^{0,1}$.

20. Aflaţi $a, b \in \mathbb{Z}$ astfel încât

$$\sqrt[3]{28 + 17\sqrt{5}} = a + b\sqrt{5}.$$

21. Comparaţi numerele $\log_2 3$ şi $\log_3 4$.

22 Determinaţi valorile reale ale lui x pentru care $\log_x(x+2) = 2$.

23. Calculaţi modulul numărului complex $z = \left(\sqrt{3} + \sqrt{5}\mathrm{i}\right)^3$.

24. Determinaţi numerele $z \in \mathbb{C}$ pentru care $|z| \leq 2$ şi $|z-1| \leq 3$.

Clasa a XI-a

25. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} a & a+1 & a+2 \\ b & b+1 & b+2 \\ 1 & c & c^2 \end{pmatrix}$, unde a, b şi c sunt numere reale.

a) Calculaţi $\det(A)$.

b) Determinaţi valorile reale ale lui b şi c, ştiind că $a = 2$ şi $\mathrm{rang}(A) = 1$.

c) Dacă $a = b = 2$ şi $c = 1$, calculaţi A^{2014}.

26. Se consideră funcţia $f : (-\infty, -1) \cup (0, \infty) \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = x\left(\sqrt{\frac{x+1}{2}} - \sqrt{\frac{x}{x+1}}\right).$$

a) Calculaţi $f'(x)$, $x \in (-\infty. -1) \cup (0, \infty)$.

b) Scrieţi ecuaţia tangentei la graficul lui f în punctul de abscisă $x = 1$, situat pe graficul lui f.

c) Determinaţi ecuaţia asimptotei spre $+\infty$ a graficului lui f.

Clasa a XII-a

27. Se consideră mulţimea $M = \left\{\left(\begin{array}{cc} 5x & 10x \\ -x & -2x \end{array}\right) \,\middle|\, x \in \mathbb{Q}\right\}$.

a) Arătaţi că $AB \in M$, oricare ar fi $A, B \in M$.

b) Arătaţi că $(M, \cdot)$ este grup abelian.

c) Calculaţi $\left(\begin{array}{cc} 5 & 10 \\ -1 & -2 \end{array}\right)^{2014}$.

28. Se consideră funcţiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \mathrm{e}^{3x} \sin 2x$ şi $F(x) = \mathrm{e}^{3x}(A \sin 2x + B \cos 2x)$, unde A şi B sunt numere reale.

a) Arătaţi că dacă G este o primitivă a lui f, atunci $G(0) \leq G\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

b) Determinaţi A şi B ştiind că F este o primitivă a lui f.

c) Calculaţi $\int_0^{\pi} f(x)\mathrm{d}x$.

PROBLEME PENTRU CICLUL PRIMAR[1)]

P:628. Un număr natural de trei cifre împărţit la răsturnatul său dă câtul 2 şi restul 100. Aflaţi numărul ştiind că diferenţa dintre cifra sutelor şi cea a unităţilor este 4.

Nicoleta Stanciu, Ploieşti

P:629. La împărţirea prin 18 a numerelor naturale a şi b se obţin resturile 11, respectiv 17. Determinaţi restul împărţirii la 9 a numărului $2 \times a + b$.

Cătălin Năchilă şi *Petre Năchilă*, Ploieşti

P:630. Dacă a, b, c sunt trei numere naturale nenule astfel încât $a \times b = 98$, $b \times c = 175$ şi $c - a = 11$, aflaţi numerele a, b, c.

Eugen Niţă, Ploieşti

---

1) Se primesc soluţii până la 31 martie 2014 (data poştei). (N.R.)