PROBLEME PROPUSE

PROBLEME PENTRU EXAMENE NAŢIONALE[1)]

Clasa a VII-a

1. Dacă $A \times B = \{(1,3),(2,3),(3,3),(1,5),(2,5),(3,5)\}$, aflaţi mulţimile A şi B.

2. Comparaţi numerele $0,(237)$ şi $\dfrac{235}{990}$.

3. Calculaţi $3a+4b-5c$, ştiind că numerele a, b, c sunt invers proporţionale cu $\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{5}$.

4. Înălţimea din A a triunghiului isoscel ABC $(AB = AC)$ este jumătate din BC. Aflaţi măsurile unghiurilor triunghiului ABC.

5. În triunghiul dreptunghic isoscel ABC $(AB = AC)$, BD este bisectoare, $D \in AC$. Aflaţi măsurile unghiurilor triunghiului BCD.

6. În triunghiul dreptunghic ABC $(\mathrm{m}(\sphericalangle A) = 90^\circ)$ mediana AM $(M \in BC)$ este congruentă cu cateta AB. Aflaţi măsurile unghiurilor triunghiului ACM.

Clasa a VIII-a

7. Stabiliţi dacă numărul $\sqrt{2 \cdot 10^n + 4}$, $n \in \mathbb{N}$, poate fi raţional. Justificaţi răspunsul dat.

8. Calculaţi $(3x+2)^2 - (3x-1)(3x+1)$.

9. Aflaţi numărul m ştiind că ecuaţia $mx+3 = 5m+9$, cu necunoscuta x, are soluţia 2.

10. Un trapez are înălţimea de 3 cm. Aflaţi aria trapezului, ştiind că linia mijlocie are lungimea de 4 cm.

11. Stabiliţi natura paralelogramului $ABCD$ ştiind că diagonala AC este bisectoarea unghiului $\sphericalangle DAB$. Justificaţi răspunsul dat.

12. Trapezul $ABCD$ are vârfurile pe cercul $\mathcal{C}(O, r)$. Ştiind că $AC = 9$ cm şi $\mathrm{m}(\sphericalangle ABC) = 60^\circ$, aflaţi lungimea razei cercului.

Clasa a IX-a

13. Să se afle a 2013-a zecimală a numărului $\dfrac{1}{13}$.

14. Fie $x, y \in (-1, 1)$. Să se arate că $\dfrac{x+y}{xy+1} \in (-1, 1)$.

---

1) La problemele din această rubrică nu se primesc soluţii. (N.R.)

15. Să se arate că $(a+b)^5 - a^5 - b^5 = 5ab(a+b)(a^2+ab+b^2)$, oricare ar fi $a, b \in \mathbb{R}$.

16. Să se determine elementele mulţimii
$$A = \left\{ x \in \mathbb{Z} \,\middle|\, x = \frac{6n-7}{2n+1},\ n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

17. Să se determine numerele întregi n pentru care numărul $\sqrt{n^2+3}$ este raţional.

18. Să se arate că mulţimea $A = \left\{ \dfrac{n^2+1}{(n+2)^2} \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\}$ este mărginită.

Clasa a X-a

19. Să se determine valorile reale ale lui x pentru care
$$\sqrt{x^2+2x+1} = 2x+1.$$

20. Să se ordoneze crescător numerele $\sqrt[3]{4}$, $\sqrt[4]{6}$, $\sqrt[12]{300}$.

21. Să se arate că numărul $\sqrt[3]{9\sqrt{3} - 11\sqrt{2}}$ se poate scrie sub forma $a\sqrt{2} + b\sqrt{3}$, cu $a, b \in \mathbb{Z}$.

22. Să se calculeze modulul numărului complex $(\sqrt{3} - 3\mathrm{i})^{20}$.

23. Fie $z \in \mathbb{C}$ astfel încât $\dfrac{z+1}{z} = 1$. Să se calculeze z^6.

24. Să se calculeze $\displaystyle\sum_{k=1}^{2013} (-\mathrm{i})^k$.

Clasa a XI-a

25. Fie şirul $(a_n)_{n\geq 0}$ definit prin $a_0 \in (0,1)$ şi $a_{n+1} = n + 1 - \sqrt{a_n}$, $n \geq 0$.

a) Să se arate că $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{a_n}}{n} = 0$.

b) Să se arate că $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = 1$.

c) Să se arate că şirul $(a_n)_{n\geq 0}$ este nemărginit.

26. Fie matricea cu elemente reale $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ -1 & b \end{pmatrix}$, având $a + b > 2$.

a) Să se determine ab ştiind că $\det(A^3) = 27$.

b) Să se determine $a - b$ astfel încât $AB = BA$, unde $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$.

c) Să se arate că $A^n \neq I_2$, oricare ar fi $n \geq 1$.

Clasa a XII-a

27. 1. Considerăm funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1 + \sin x$.

a) Să se arate că orice primitivă a funcţiei f este strict crescătoare.

b) Fie F primitiva lui f cu $F(-\pi) = 0$. Să se calculeze $F(2\pi)$.

c) Să se calculeze $\displaystyle\int f(x)f(-x)\mathrm{d}x$.

28. Se consideră legea de compoziţie "$\circ$" definită pe $\mathbb{R}$ prin

$$x \circ y = 2xy - x - y \text{ şi fie } H = \left(\frac{1}{2}, \infty\right).$$

a) Să se arate că H este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ faţă de $\circ$.

b) Să se determine $u \in \mathbb{R}$ astfel încât $u \circ x = x \circ u = u$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

c) Să se arate că $(H, \circ)$ este grup abelian.