Funcţia $f : [0,1] \to [0,1]$ definită prin

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & \text{pentru } x = 0 \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}, & \text{pentru orice } x \in (0,1) \\ \frac{1}{2}, & \text{pentru } x = 1 \end{cases}.$$

verifică (i) din Propoziţia 2.2 şi parţial (ii). Cu toate acestea, f nu are puncte fixe, după cum se poate observa.

Bibliografie

[1] T.-L. Rădulescu, V. Rădulescu, *Picard and Krasnoselski sequences: applications to fixed point problems*, Gazeta Matematică seria A nr.3-4/2010 pag.77-91.

[2] G. Sireţchi, *Calcul diferenţial şi integral, noţiuni fundamentale*, Ed. Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti 1985.

O CONDIŢIE SUFICIENTĂ CA UN POLIGON SĂ FIE REGULAT

LEONARD GIUGIUC[1)]

Abstract. The object of this note is to prove that if the the points dividing the sides of a given polygon into the same ratio are the vertices of a regular polygon, then the given polygon is also regular.

Keywords: polygon, complex coordinates

MSC : 51M04

În unele probleme de geometrie se cere ca, pornind de la punctele care împart laturile unui poligon dat în anumite rapoarte, să reconstituim poligonul iniţial. În cele ce urmează, vom demonstra un rezultat din această sferă de idei.

Teoremă. *Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$ şi poligonul $A_1A_2 \ldots A_n$. Considerăm punctele $B_1 \in (A_1A_2)$, $B_2 \in (A_2A_3)$, $\ldots$, $B_{n-1} \in (A_{n-1}A_n)$, $B_n \in (A_nA_1)$ pentru care*

$$\frac{B_1A_2}{A_1A_2} = \frac{B_2A_3}{A_2A_3} = \ldots = \frac{B_{n-1}A_n}{A_{n-1}A_n} = \frac{B_nA_1}{A_nA_1} = \alpha.$$

Dacă poligonul $B_1B_2 \ldots B_{n-1}B_n$ este regulat şi $\alpha \neq \frac{1}{2}$, atunci poligonul $A_1A_2 \ldots A_{n-1}A_n$ este regulat.

Demonstraţie. Luăm originea planului complex în centrul poligonului $B_1B_2 \ldots B_n$ şi obţinem $A_k(a_k)$, $B_k(b_k)$, cu $b_k = r\varepsilon^{k-1}$, $k = \overline{1,n}$, unde r este

[1)] Profesor, Drobeta Turnu-Severin

raza cercului circumscris poligonului $B_1B_2\dots B_{n-1}B_n$ şi $\varepsilon = \cos\dfrac{2\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\dfrac{2\pi}{n}$. Atunci

$$\begin{cases} \alpha a_1 + (1-\alpha)\,a_2 = r & (1) \\ \alpha a_2 + (1-\alpha)\,a_3 = r\varepsilon & (2) \\ \alpha a_3 + (1-\alpha)\,a_4 = r\varepsilon^2 & (3) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ \alpha a_{n-1} + (1-\alpha)\,a_n = r\varepsilon^{n-2} & (n-1) \\ \alpha a_n + (1-\alpha)\,a_1 = r\varepsilon^{n-1}. & (n) \end{cases}$$

Să înmulţim relaţia (k) cu $(-1)^{k-1}\alpha^{n-k}(1-\alpha)^{k-1}$, $k=\overline{1,n}$ şi să sumăm relaţiile astfel obţinute. Deducem

$$a_1\left(\alpha^n - (\alpha-1)^n\right) = r\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\alpha^{n-k}(1-\alpha)^{k-1}\varepsilon^{k-1}.$$

Termenii sumei din membrul drept formează o progresie geometrică cu raţia

$$\rho = \frac{(\alpha-1)\varepsilon}{\alpha}.$$

Observăm că $\rho \neq 1$, deoarece ε are partea imaginară nenulă şi α este număr real. Astfel, suma din membrul drept este

$$\alpha^{n-1}\frac{1-\rho^n}{1-\rho} = \frac{\alpha^n - (\alpha-1)^n\varepsilon^n}{\alpha + (1-\alpha)\varepsilon} = \frac{\alpha^n - (\alpha-1)^n}{\alpha + (1-\alpha)\varepsilon}.$$

Să observăm acum că $\alpha^n - (\alpha-1)^n \neq 0$, deoarece în caz contrar am obţine $|\alpha - 1| = |\alpha|$, de unde $\alpha = \dfrac{1}{2}$ – contradicţie. Deducem astfel

$$a_1 = \frac{r}{\alpha + (1-\alpha)\varepsilon}.$$

Analog obţinem

$$a_k = \frac{r\varepsilon^{k-1}}{\alpha + (1-\alpha)\,\varepsilon},\ k = \overline{1,n}\ ,$$

deci poligonul $A_1A_2\dots A_{n-1}A_n$ este regulat.

Observaţia 1. Dacă n este impar, condiţia $\alpha \neq \dfrac{1}{2}$ nu este necesară. Într-adevăr, dacă n este impar, atunci funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = x^n$ este strict crescătoare, deci injectivă, de unde $\alpha^n \neq (\alpha-1)^n$ şi raţionamentul precedent rămâne valabil.

Observaţia 2. Dacă n este par, condiţia $\alpha \neq \dfrac{1}{2}$ este necesară, după cum ne arată următorul exemplu:

Fie $A_1A_2A_3A_4$ un patrulater convex ortodiagonal şi cu diagonalele de lungimi egale. Atunci $B_1B_2B_3B_4$ este pătrat pentru $\alpha = \frac{1}{2}$, deşi $A_1A_2A_3A_4$ nu este neapărat pătrat.

Observaţia 3. Teorema discutată poate fi demonstrată şi pe cale sintetică, folosind proprietatea: *dacă notăm cu $\mathcal{H}_{C,r}$ omotetia de centru C şi raport r, atunci $\mathcal{H}_{C_1,r_1} \circ \mathcal{H}_{C_2,r_2} = \mathcal{H}_{C_3,r_3}$, unde $r_3 = r_1r_2 \neq 1$ şi C_3 este punctul pentru care*

$$\overrightarrow{C_3C_1} = \frac{r_1 - r_1r_2}{1 - r_1r_2} \cdot \overrightarrow{C_2C_1}.$$

Să determinăm acum poziţia lui A_1. Notând

$$r = \frac{\alpha}{\alpha - 1},$$

omotetiile $\mathcal{H}_{B_1,r}$, $\mathcal{H}_{B_2,r}$, $\ldots$, $\mathcal{H}_{B_{n-1},r}$, $\mathcal{H}_{B_n,r}$, duc succesiv A_1 în A_2, A_3, $\ldots$, A_n, A_1. Compusa lor este omotetia $\mathcal{H}$ de raport $r^n \neq 1$ (deoarece $r \neq \pm 1$) şi $\mathcal{H}(A_1) = A_1$, deci $\mathcal{H}$ are centrul A_1. Astfel, poziţia lui A_1 este determinată de poziţiile centrelor de omotetie $B_1, B_2, \ldots, B_n$, considerate în această ordine.

În mod similar, poziţia lui A_2 este determinată de poziţiile centrelor de omotetie $B_2, B_3, \ldots, B_n, B_1$, considerate în această ordine. Dar, compusa omotetiilor cu ordinea $B_2, B_3, \ldots, B_n, B_1$ este compusa omotetiilor cu ordinea $B_1, B_2, \ldots, B_n$ compusă cu o rotaţie $\mathcal{R}$ de centru O şi unghi $\frac{2\pi}{n}$. Aceasta arată că $A_2 = \mathcal{R}(A_1)$. În mod similar $A_3 = \mathcal{R}(A_2)$, $\ldots$, $A_n = \mathcal{R}(A_{n-1})$, ceea ce demonstrează concluzia.

În final, invităm cititorul să studieze ce concluzie se poate obţine în cazul când $B_1B_2 \ldots B_n$ este un poligon oarecare.