GAZETA MATEMATICĂ

SERIA B

PUBLICAŢIE LUNARĂ PENTRU TINERET

Fondată în anul 1895

ANUL CXVII nr. 9 **septembrie 2012**

ARTICOLE ŞI NOTE MATEMATICE

ASUPRA CRITERIILOR DE DIVIZIBILITATE ALE LUI SPIRU HARET

Marcel Ţena[1)]

Omagiu lui Spiru Haret, la un secol
de la trecerea sa în eternitate

Abstract. This note extends two observations of Spiru Haret regarding the divisibility criteria with 9 and 11.

Keywords: divisibility criterion, congruence, polynomial.

MSC : 11A07.

În [1] matematicianul român *Spiru C. Haret* (1851-1912), marele reformator al învăţământului nostru, stabileşte două criterii de divizibilitate pe care le enunţă în felul următor:

Criteriul 1 (*Spiru Haret*). *Fie* 10^m *o putere întreagă şi pozitivă a lui* 10 *şi să presupunem că* $10^m - 1 = n_1 n_2 n_3 \ldots$. *Ca să vedem dacă un număr* N *se împarte exact prin vreunul din numerele* n_1 *sau* n_2 *sau* $n_3, \ldots,$ *despărţim numărul* N *în grupe de câte* m *cifre de la dreapta spre stânga, facem suma acestor grupe şi dacă această sumă se împarte exact prin* n_1 *sau* n_2 *sau* $n_3, \ldots,$ *atunci şi numărul dat* N *se împarte exact printr-însul.*

Criteriul 2 (*Spiru Haret*). *Fie puterea întreagă şi pozitivă* 10^m *şi să presupunem acum că* $10^m + 1 = n_1 n_2 n_3 \ldots$. *Ca să vedem dacă un număr* N *se împarte exact prin vreunul din numerele* n_1 *sau* n_2 *sau* $n_3, \ldots,$ *despărţim numărul* N *în grupe de câte* m *cifre, de la dreapta spre stânga; facem de o parte suma grupelor de ordin cu soţ, de alta suma celor de ordin fără soţ şi scădem o sumă din cealaltă; şi dacă diferenţa se împarte exact prin* n_1 *sau* n_2 *sau* $n_3, \ldots,$ *atunci şi numărul* N *se împarte exact printr-însul.*

1) Profesor dr., Colegiul Naţional „Sf. Sava“, Bucureşti

Pentru criteriul 1, *Spiru Haret* consideră exemplul următor: $m = 3$, $10^3 - 1 = 27 \cdot 37$; $N = 537\,548\,913$; deoarece $537 + 548 + 913 = 1998$ şi 1998 se divide cu 27 şi 37, rezultă că N se divide cu 27 şi 37.

De asemenea, el face remarca următoare: întrucât

$$10^1 - 1 = 9, \quad 10^2 - 1 = 9 \cdot 11, \quad 10^3 - 1 = 27 \cdot 37, \quad 10^4 - 1 = 9 \cdot 11 \cdot 111, \ldots,$$

se pot obţine criterii de divizibilitate cu fiecare din numerele 9, 11, 27, 37, 101, ...

Pentru criteriul 2, *Spiru Haret* consideră exemplul următor: $m = 3$, $10^3+1 = 7 \cdot 11 \cdot 13$; $N = 4\,803\,324\,526$; deoarece $(526+803)-(324+4) = 1001$ şi 1001 se divide cu 7, cu 11 şi cu 13, rezultă că N se divide cu fiecare din numerele 7, 11, 13.

Întrucât $10^1+1 = 11$, $10^2+1 = 101$, $10^3+1 = 7 \cdot 11 \cdot 13$, $10^4+1 = 73 \cdot 137$, ..., se pot obţine criterii de divizibilitate cu fiecare din numerele 11, 101, 7, 13, 73, 137, ...

În cele ce urmează dăm o proprietate generală a congruenţelor, valabilă în inele comutative, din care, prin particularizări convenabile, regăsim criteriile de divizibilitate ale lui *Spiru Haret*, precum şi teorema lui *Bézout* de la polinoame.

Fie A un inel comutativ şi $x, y, d \in A$. Spunem că x şi y sunt *congruente modulo* d şi scriem $x \equiv y \pmod d$ dacă d divide $x - y$, adică $x - y = dz$ pentru un anumit $z \in A$. Evident $x \equiv 0 \pmod d \Leftrightarrow d \mid x$.

Fie $a_0, a_1, \ldots, a_n \in A$ şi funcţia polinomială

$$f : A \to A, \qquad f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n.$$

În contextul de mai sus, avem următoarea proprietate generală a congruenţelor:

Teoremă. *Dacă* $x \equiv y \pmod d$ *şi* $r \in A$, *atunci*:

1° $f(x) \equiv f(y) \pmod d$, *adică funcţiile polinomiale păstrează congruenţele.*

2° $f(x) \equiv r \pmod d \Leftrightarrow f(y) \equiv r \pmod d$.

Demonstraţie. 1° Din $x - y \mid x^k - y^k$, $\forall\, k \in \mathbb{N}^*$, rezultă uşor că:

$$x - y \mid f(x) - f(y).$$

Din $d \mid x - y$ şi $x - y \mid f(x) - f(y)$, rezultă $d \mid f(x) - f(y)$, adică $f(x) \equiv f(y) \pmod d$.

2° Rezultă din 1° şi tranzitivitatea congruenţei.

Considerăm acum două cazuri particulare.

Cazul I. Fie $A = \mathbb{Z}$ inelul numerelor întregi, $x = 10^m$, cu $m \in \mathbb{N}^*$, iar $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \{0, 1, \ldots, 10^m - 1\}$. Numerele naturale $a_0, a_1, \ldots, a_n$ pot fi gândite ca numere de m cifre, putând începe cu una sau mai multe cifre de 0.

Fie $N = \overline{\overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0}}$ numărul obţinut prin juxtapunerea acestor „grupe“ de câte m cifre. Aşadar:

$$N = \overline{\overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0}} = a_0 + a_1 \cdot 10^m + a_2 \cdot 10^{2m} + \dots + a_n \cdot 10^{nm} = f\left(10^m\right).$$

Fie d un divizor natural al numărului $10^m - 1$, adică $10^m \equiv 1 \pmod{d}$. Aplicând teorema, pct. 2°, în care $x = 10^m$, $y = 1$, $r = 0$, avem:

$$N = f\left(10^m\right) \equiv 0 \pmod{d} \Leftrightarrow f(1) \equiv 0 \pmod{d} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow a_0 + a_1 + \dots + a_n \equiv 0 \pmod{d},$$

adică primul criteriu al lui *Spiru Haret*.

În mod analog, dacă d este un divizor natural al numărului $10^m + 1$, adică $10^m \equiv -1 \pmod{d}$, aplicând teorema, pct. 2°, în care $x = 10^m$, $y = -1$, $r = 0$, obţinem:

$$N = f\left(10^m\right) \equiv 0 \pmod{d} \Leftrightarrow f(-1) \equiv 0 \pmod{d} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (a_0 + a_2 + a_4 + \dots) - (a_1 + a_3 + a_5 + \dots) \equiv 0 \pmod{d},$$

adică cel de-al doilea criteriu al lui *Spiru Haret*.

Cazul II. Fie K un corp comutativ şi $A = K[X]$ inelul polinoamelor cu coeficienţi în K. Pentru orice polinom $f \in K[X]$ şi orice $a \in K$, avem evident $X \equiv a \pmod{(X - a)}$ şi aplicând teorema, pct. 1°, cu $x = X$, $y = a$, $d = X - a$, obţinem $f(X) \equiv f(a) \pmod{(X - a)}$, adică

$$f(X) = (X - a)g(X) + f(a), \tag{1}$$

pentru un anumit $g \in K[X]$. Egalitatea (1) arată că restul împărţirii polinomului f prin $X - a$ este $f(a)$, adică teorema lui *Bézout*. Aplicând teorema, pct. 2°, cu $r = 0$, obţinem:

$$f(X) \equiv 0 \pmod{(X - a)} \Leftrightarrow f(a) \equiv 0 \pmod{(X - a)} \Leftrightarrow f(a) = 0,$$

care este forma cea mai uzuală a teoremei lui *Bézout* şi anume:

f se divide cu $X - a$ dacă şi numai dacă a este rădăcină a polinomului f.

Bibliografie

[1] Spiru C. Haret, *Extensiunea regulelor divizibilităţii prin* 9 *şi* 11, G. M. vol. XVII, 1911-1912, p. 121-123.