CONCURSUL DE MATEMATICĂ „SPERANŢE“
Ediţia a VIII-a Comăneşti, 27 - 29 aprilie 2012

prezentare de Mihai-Lucian Gloambeş[1)]

În perioada 27 - 29 aprilie 2012 a avut loc la Comăneşti, judeţul Bacău, a VIII-a ediţie a concursului de matematică „Speranţe”, adresat elevilor claselor III – XI, cu participarea a peste 300 de elevi din judeţele Bistriţa-Năsăud, Suceava, Botoşani, Neamţ, Vrancea, Buzău, Iaşi şi Bacău.

În continuare prezentăm o selecţie din subiectele propuse în cadrul concursului şi elevii care au opbţinut premiul I.

Clasa a V-a

1. Comparaţi numerele:
$A = 2^0 \cdot 2^1 \cdot 2^2 \cdot \ldots \cdot 2^{99} \cdot 26$ şi $B = 3^{3302} - 3^{3301} + 21 \cdot 9^{1650}$.

Lucian Gloambeş

2. Arătaţi că numărul:

$$A = \frac{13}{23} + \frac{1313}{2323} + \frac{131313}{232323} + \ldots + \frac{1313\ldots13}{\underbrace{2323\ldots23}_{598\ \text{cifre}}}$$

este pătrat perfect.

Maria Sas

[1)]Profesor, Şcoala gimnazială „Liviu Rebreanu“, Comăneşti

3. Rezolvaţi în mulţimea numerelor naturale ecuaţia $x^y + y = 128$.

Artur Bălăucă

Clasa a VI-a

1. a) Arătaţi că ecuaţia $x^2 + 503 \cdot y = 2012$ are o infinitate de soluţii în mulţimea numerelor întregi.

b) Fie proporţiile: $\dfrac{x}{1,(2)} = \dfrac{y}{1,(5)}$ şi $\dfrac{y}{2,(3)} = \dfrac{z}{1,(8)}$. Aflaţi numerele raţionale x, y, z ştiind că $\dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{7} + \dfrac{z}{2} = 34$.

Lucian Gloambeş şi Nicolae Sanda

2. Aflaţi numerele naturale pătrate perfecte de forma $\overline{abc}$ scrise în baza 10, ştiind că sunt îndeplinite simultan condiţiile:

i) $a < b < c$;

ii) numărul $n = 5\left[\overline{a,b(c)} + \overline{a,c(b)} + \overline{b,a(c)} + \overline{b,c(a)} + \overline{c,a(b)} + \overline{c,b(a)}\right]$ este pătratul unui număr raţional.

Artur Bălăucă

Clasa a VII-a

1. Dacă a, b, c sunt numere raţionale şi $ab + bc + ca = 2012$, arătaţi că numărul $A = \sqrt{(2012 + a^2)(2012 + b^2)(2012 + c^2)}$ este raţional.

Petru Rotaru

2. a) Comparaţi numerele raţionale a şi b, unde $a = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \ldots + \dfrac{1}{2012}$ şi $b = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{3} + \dfrac{3}{4} + \ldots + \dfrac{2011}{2012}$.

Lucian Gloambeş

b) Se dau mulţimile:

$$A = \left\{x \in \mathbb{Z} \,\middle|\, [\sqrt{x-1}] = \frac{x-1}{2}\right\} \text{ şi } B = \left\{y \in \mathbb{Z} \,\middle|\, [\sqrt{y-2}] = \frac{3y-7}{2}\right\},$$

unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real a. Să se determine $A \cup B$ şi $A \cap B$.

Aida - Elena Bălăucă

3. Fie trapezul isoscel $ABCD$ cu $AB \parallel CD$ şi $CD < AB$. Pe laturile $[AD], [BC]$ şi $[CD]$ ale trapezului se consideră punctele M, N şi respectiv P astfel încât $\sphericalangle DMP \equiv \sphericalangle NPC$ şi $CD = a$.

a) Arătaţi că $xy \leq \dfrac{(x+y)^2}{4}$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$.

b) Aflaţi poziţia punctului P pe baza $[CD]$ a trapezului ştiind că are loc relaţia $4 \cdot MD \cdot CN = a^2$.

c) Dacă $(MP$ este bisectoarea $\sphericalangle DMN$, arătaţi că $QP \perp AB$, unde $\{Q\} = AD \cap BC$.

Artur Bălăucă

Clasa a VIII-a

1. a) Fie $A = \sqrt{8+2\sqrt{15}} - \sqrt{8-2\sqrt{15}} - (\sqrt{12}+1)$. Calculaţi A^{2012}.

Lucian Gloambeş

b) Să se rezolve în $\mathbb{N}$ ecuaţia $\overline{120xy}_p = t^2 - 1, p > 2,\ p, x, y, t \in \mathbb{N}$.

Robert Laic

2. a) Dacă $a \geq 0$ şi $b \geq 0$, să se arate că:

$$\frac{a}{a+1} + \frac{b}{(a+b+1)^2} + \frac{1}{a+b+1} \leq 1.$$

Când avem egalitate?

Artur Bălăucă

b) Determinaţi $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât $3\sqrt{a+b} + 2\sqrt{8-a} + \sqrt{6-b} = 14$.

Maria Sas

3. În cubul $ABCDA'B'C'D'$ punctele M, N, P sunt proiecţiile vârfului A pe dreptele $A'B$, $A'C$, respectiv $A'D$.

a) Arătaţi că $A'C \perp (MNP)$ şi punctele M, N, P, A sunt coplanare.

b) Calculaţi sinusul unghiului format de planele (ABC) şi (MNP).

Toma Gloambeş

Clasa a IX-a

1. Calculaţi în funcţie de $n \in \mathbb{N}^*$ suma:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \left[\sqrt{k^2-k+1} + \sqrt{k^2+k+1}\right],$$

unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a numărului real x.

2. Se dă ecuaţia $x^2 - (3a+1)x - a^3 = 0; a \in \mathbb{R}; a \geq -\dfrac{1}{4}$. Să se arate că:

a) ecuaţia are rădăcini reale;

b) între rădăcinile ei există relaţia $\sqrt[3]{x_1} + \sqrt[3]{x_2} = 1$.

c) Considerând $a \in \mathbb{N}$, să se găsească condiţia necesară şi suficientă ca rădăcinile să fie întregi.

3. a) Fie ecuaţia $4x^2 - 2x - 1 = 0$.

i) Să se arate că ecuaţia are soluţia $x_1 = \cos 36°$.

ii) Să se afle $\cos 36°$.

b) Fie $ABCDE$ un pentagon convex iar M, N, P, Q, X, Y respectiv mijloacele segmentelor (BC), (CD), (DE), (EA), (MP) şi (NQ). Să se arate că dreptele XY şi AB sunt paralele.

Clasa a X-a

1. Arătaţi că, dacă funcţia $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ îndeplineşte relaţia:

$$f(x) + 2f(\overline{x}) = 2x + 1,$$

atunci ea este bijectivă.

2. Arătaţi că:

a) $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3$, oricare ar fi numărul natural nenul n;

b) $\sqrt[n+1]{n+1} < \sqrt[n]{n}$, oricare ar fi numărul natural $n \geq 3$;

c) Dacă definim $(a_n)_{n\geq 1}$ prin $a_1 = 1$ şi $3^{a_{n+1}} = 3^{a_1} + 2 \cdot 3^{a_2} + \ldots + n \cdot 3^{a_n}$, atunci $a_n \geq n \log_3 n - n + 1$.

Clasa a XI-a

1. Fie $a_1 > 0$ şi $a_{n+1} = a_n + \frac{n}{a_n}$, pentru $n \geq 1$, $n \in \mathbb{N}$.

a) Să se arate că $a_n \geq n$, pentru $n \geq 2,\ n \in \mathbb{N}$.

b) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

c) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{n}$.

2. Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}^*$ se consideră funcţia $f_n : A \to \mathbb{R}$, unde $A = \mathbb{R}\setminus\left\{0, 1^2, 2^2, ..., n^2\right\}$ şi:

$$f_n(x) = \frac{1}{2x} + \frac{1}{x - 1^2} + \frac{1}{x - 2^2} + ... + \frac{1}{x - n^2}.$$

a) Să se calculeze limitele $\lim\limits_{x\searrow 0} f_n(x)$ şi $\lim\limits_{x\nearrow 1} f_n(x)$.

b) Să se arate că ecuaţia $f_n(x) = 0$ are o singură soluţie x_n în intervalul $(0, 1)$.

c) Să se arate că şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este convergent, unde x_n este soluţia ecuaţiei $f_n(x) = 0$.

3. Fie A, B două matrice singulare de ordin 3 cu elemente întregi astfel încât $AB = BA$ şi polinomul cu coeficienţi întregi de tip determinant $P(X) = \det(A + XB)$.

a) Să se arate că $P(i) \cdot P(-i) = \det\left(A^2 + B^2\right)$, unde $i^2 = -1$

b) Să se arate că $A^3 + B^3 = (A + B)(A + \varepsilon B)\left(A + \varepsilon^2 B\right)$, unde ε este o rădăcină nereală de ordin trei a unităţii.

c) Ştiind că $\det(A + B) = \det\left(A^2 + B^2\right) = 2$ calculaţi $\det\left(A^3 + B^3\right)$.

Premiul I a fost obţinut de următorii elevi:

Clasa a III-a: *Harapu Alexandra*, Şc. „L. Rebreanu“ Comăneşti şi *Dăscăliţa Matei*, C.N. „Roman Vodă“ Roman; **clasa a IV-a:** *Bursuc Tudor*, Şc. „V. Alecsandri“ Roman şi *Hriscu Octavia*, C.N. „Roman Vodă“ Roman; **clasa a V-a:** *Mihai Crina Teodora,* Gr. Şc. Ind. Dărmăneşti şi *Okukura Andrew*, C.N. „Roman Vodă“ Roman; **clasa a VI-a:** *Balaş*

Teodora şi *Stoica Cosmina*, C.N. „Ferdinand I“ Bacău; **clasa a VII-a:** *Pricope Tudor Vlad*, C.N. „Mihai Eminescu“ Botoşani; **clasa a VIII-a:** *Cojocariu Sebastian*, C.N. „Mihai Eminescu“ Botoşani; **clasa a IX-a:** *Văcăreanu Ştefan*, C.N. „Mihai Eminescu“ Botoşani şi *Trofin Andrei Vlad*, C. N. „A. I. Cuza“ Focşani; **clasa a X-a:** *Mocanu Alexandru*, C.N. „Ferdinand I“ Bacău; **clasa a XI-a:** *Timofte Andrei*, C.N. „Ştefan cel Mare“, Câmpulung Moldovenesc şi *Huluba Ramona*, C.N. „Ferdinand I“ Bacău.