ÎMPĂRŢIREA UNEI SUPRAFEŢE POLIGONALE CONVEXE ÎN TRIUNGHIURI ECHIVALENTE

Constantin Rusu[1)]

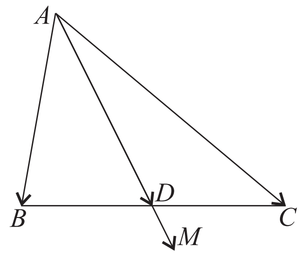
Abstract. The purpose of this note is to give equivalent conditions for the existence of an interior point of a polygon so that the triangles sharing this vertex and having a common side with the polygon divide the polygon into parts with the same area.

Keywords: partition, equivalent triangles.

MSC : 51M04, 51M25.

Scopul lucrării este de a caracteriza poligoanele convexe care pot fi împărţite de un punct interior în triunghiuri echivalente, având ca baze laturile poligonului şi un vârf comun în acest punct, precum şi de a da unele exemple.

Lema 1. *Locul geometric al punctelor M din interiorul unui unghi BAC cu proprietatea că triunghiurile MAB şi MAC sunt echivalente este semidreapta ce conţine mediana din A a triunghiului ABC.*



Demonstraţie. Se poate da o demonstraţie ducând înălţimile din B şi C ale triunghiurilor MAB şi MAC şi utilizând triunghiurile dreptunghice congruente care apar. Lăsăm acest lucru ca temă în seama cititorilor şi dăm aici o demonstraţie vectorială. Fie D mijlocul lui $[BC]$. Folosind proprietăţile produsului vectorial a doi vectori, avem succesiv:

$$S_{MAB} = S_{MAC} \Leftrightarrow \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AM}\times\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AM} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AM} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)\times\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AD}\times\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AM}$ vectori coliniari $\Leftrightarrow M \in (AD$.

Lema 2. *Fie $[AB]$ un segment dat. Locul geometric al punctelor M situate de aceeaşi parte a dreptei AB, cu proprietatea că aria triunghiului MAB este o constantă dată, este o paralelă la AB.*

Demonstraţia este extrem de simplă şi rămâne ca temă.

---

1) Profesor, Lic. „Ştefan cel Mare“, Râmnicu Sărat

Notaţii. Fie $P_1P_2\ldots P_n$ un poligon convex cu n laturi ($n \geq 3$), având aria S. Notăm cu:

l_i = lungimea laturii $[P_iP_{i+1}]$, $i = 1, 2, \ldots, n$ (unde $P_{n+1} = P_1$);

m_i = semidreapta cu originea în P_i care conţine mediana triunghiului $P_{i-1}P_iP_{i+1}$, $i = 1, 2, \ldots, n$ (unde $P_0 = P_n$, $P_{n+1} = P_1$);

d_i = paralela la dreapta P_iP_{i+1} dusă la distanţa $h_i = \dfrac{2S}{nl_i}$ de această dreaptă, în semiplanul ce conţine poligonul, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Cu notaţiile precedente, avem următoarea teoremă de caracterizare:

Teoremă. *Fie $P_1P_2\ldots P_n$ un poligon convex. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

$1°$ *Există un punct M în interiorul poligonului, astfel încât triunghiurile $MP_1P_2, MP_2P_3, \ldots, MP_nP_1$ sunt echivalente.*

$2°$ *Semidreptele $m_1, m_2, \ldots, m_n$ sunt concurente.*

$3°$ *Dreptele $d_1, d_2, \ldots, d_n$ sunt concurente.*

Demonstraţie. Pentru echivalenţa $1° \Leftrightarrow 2°$ aplicăm lema 1.

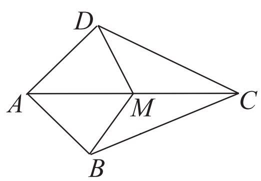
Pentru echivalenţa $1° \Leftrightarrow 3°$ aplicăm lema 2, observând că pentru orice punct $M \in d_i$ avem $S_{MP_iP_{i+1}} = \dfrac{l_ih_i}{2} = \dfrac{S}{n}$.

Observaţie. Din teoremă rezultă că dacă există un punct ce verifică $1°$, acesta este unic determinat.

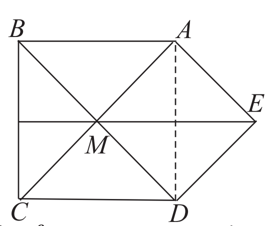
Exemple de poligoane cu proprietatea din enunţ

Evident, *orice triunghi* are proprietatea de care vorbim, punctul în cauză fiind centrul de greutate al triunghiului.

Orice poligon regulat cu $n \geq 4$ laturi are proprietatea dată, punctul respectiv fiind centrul cercului circumscris poligonului. Căutăm acum *exemple de poligoane neregulate* cu această proprietate.



Pentru $n = 4$, un patrulater care nu este pătrat şi are proprietatea cerută este paralelogramul (diferit de pătrat) sau patrulaterul $ABCD$ din figura alăturată, în care punctele B şi D sunt simetrice faţă de diagonla $[AC]$,punctul M fiind tocmai mijlocul acestei diagonale.



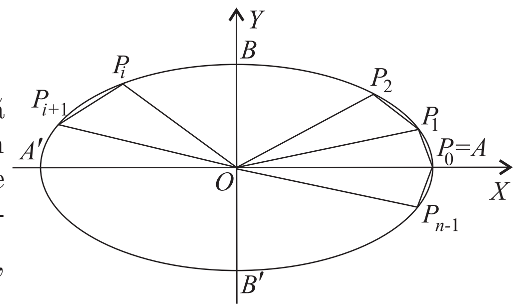
Pentru $n = 5$, un pentagon neregulat cu proprietatea dată este pentagonul $ABCDE$ din figura alăturată, în care $ABCD$ este un pătrat, iar AED este un triunghi dreptunghic isoscel ($\sphericalangle E = 90°$), punctul M fiind centrul pătratului$ABCD$.

De fapt, pentru orice $n \geq 3$ există un poligon cu n laturi, neregulat, având proprietatea din enunţ. Pentru aceasta, este suficient să luăm un poligon regulat cu n laturi şi să îl proiectăm pe un plan, neparalel cu planul poligonului, dar nici perpendicular pe acest plan. Poligonul-proiecţie are proprietatea din enunţ.

Deoarece cercul circumscris poligonului regulat se proiectează după o elipsă, putem încerca de la bun început construcţia unui poligon cu proprietatea din enunţ, înscris într-o elipsă. Avem în acest sens, următoarea:

Propoziţie. *Considerăm elipsa de ecuaţie* $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, *cu* $0<b<a$ *şi fie* $n\geq 3$ *un număr natural. Există un poligon neregulat* $P_0P_1\ldots P_{n-1}$ *înscris în elipsă, cu proprietatea că triunghiurile* $OP_0P_1, OP_1P_1, \ldots, OP_{n-1}P_0$ *sunt echivalente.*

Demonstraţie.



Fie $P_i\left(a\cos\dfrac{2i\pi}{n}, b\sin\dfrac{2i\pi}{n}\right)$, $i=0,1,2,\ldots,n-1,n$. Se vede că punctele P_i sunt pe elipsă şi avem $P_n=P_0=A(a,0)$. Pentru fiecare $i=\{0,1,2,\ldots,n-1\}$ aria triunghiului OP_iP_{i+1} este $S_{OP_iP_{i+1}}=\dfrac{1}{2}\left|\Delta_i\right|$, unde:

$$\Delta_i=\begin{vmatrix} a\cos\dfrac{2i\pi}{n} & b\sin\dfrac{2i\pi}{n} & 1\\ a\cos\dfrac{2(i+1)\pi}{n} & b\sin\dfrac{2(i+1)\pi}{n} & 1\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}.$$

Calculând determinantul, avem $\Delta_i=ab\sin\dfrac{2\pi}{n}>0$, prin urmare $S_{OP_iP_{i+1}}=\dfrac{1}{2}ab\sin\dfrac{2\pi}{n}$, pentru $i\in\{0,1,\ldots,n-1\}$. Aşadar, toate triunghiurile $OP_0P_1, OP_1P_2, \ldots, OP_{n-1}P_0$ sunt echivalente.

Observaţie. Faptul că $P_i\left(a\cos\dfrac{2i\pi}{n}, b\sin\dfrac{2i\pi}{n}\right)$, nu înseamnă că $\sphericalangle AOP_i=\dfrac{2i\pi}{n}$, cum se întâmplă în cazul cercului.