PENTRU CERCURILE DE ELEVI

METODA LUI ŢIŢEICA ÎN REZOLVAREA UNEI ECUAŢII DIOFANTICE

Vasile Berghea[1)]

Leonhard Euler s-a ocupat de ecuaţia diofantică:

$$X^2 + aY^2 + bZ^2 = W^2,\ a, b, X, Y, Z, W \in \mathbb{N}, \tag{1}$$

căreia i-a dat, fără demonstraţie, soluţia:

$$X = p^2 - aq^2 - bu^2,\ Y = 2pq,\ Z = 2pu,\ W = p^2 + aq^2 + bu^2,\ p, q, u \in \mathbb{N}.$$

În această notă vom arăta că rezolvarea ecuaţiei $X^2 + Y^2 = Z^2$, unde $X, Y, Z \in \mathbb{N}$, prin metoda lui *Ţiţeica*, pe care o găsim în [2], ne va conduce la o soluţie elementară pentru ecuaţia (1).

Căutăm soluţiile în care $W \neq 0$: împărţim cu W^2, apoi notăm:

$$x = \frac{X}{W},\ y = \frac{Y}{W},\ z = \frac{Z}{W}$$

şi astfel se obţine:

$$x^2 + ay^2 + bz^2 = 1, \tag{E}$$

[1)]Profesor, Liceul „Gh. Lazăr“, Avrig

care, în triedrul $Oxyz$, este ecuaţia unui elipsoid.

Punctul $A(1,0,0)$ aparţine lui (E), iar ecuaţia unei drepte arbitrare care trece prin A are forma:

$$\frac{x-1}{l}=\frac{y}{m}=\frac{z}{n},$$

unde l, m, n sunt coordonatele unui vector director al dreptei. Dacă l, m, n sunt numere raţionale nenule, dreapta intersectează elipsoidul încă într-un punct $B, B \neq A$, ale cărui coordonate sunt, toate, numere raţionale. Întrucât $B(x,y,z) \in (E)$ implică $B'(\pm x, \pm y, \pm z) \in (E)$, iar noi dorim rezolvarea în numere naturale, ne vom rezuma la dreptele care intersectează elipsoidul în interiorul octantului:

$$S=\{(x,y,z) \mid x>0, y>0, z>0\}.$$

Pentru aceste drepte, vectorul director are coordonatele $l<0$, $m>0$, $n>0$ sau $l>0$, $m<0$, $n<0$. Prin înmulţirea cu (-1) se trece de la un caz la celălalt, aşa că vom considera că ne găsim în primul caz.

Înlocuind l cu $-l$, ecuaţia dreptei capătă forma:

$$-\frac{x-1}{l}=\frac{y}{m}=\frac{z}{n}, \quad l,m,n \in \mathbb{Q}_+^*.$$

De asemenea putem considera că $l,m,n \in \mathbb{N}^*$, $(l,m,n)=1$, deoarece prin multiplicarea lor cu un factor întreg convenabil ales – numitorul comun al numerelor $l,m,n \in \mathbb{Q}_+^*$ – noul vector va avea coordonatele numere naturale iar direcţia aceeaşi cu a vectorului dat, deci punctul B rămâne acelaşi. Din ecuaţia dreptei găsim:

$$y=-\frac{m}{l}(x-1), \quad z=-\frac{n}{l}(x-1).$$

Acestea, înlocuite în (E), conduc la o ecuaţie de gradul doi cu o rădăcină $x=1$, care nu ne interesează (întrucât ei îi corespunde punctul A), iar cealaltă rădăcină:

$$x=\frac{am^2+bn^2-l^2}{am^2+bn^2+l^2} \in \mathbb{Q},$$

este abscisa lui B şi o folosim pentru determinarea ordonatei şi cotei acestuia, găsind:

$$y=\frac{2lm}{am^2+bn^2+l^2}, \quad z=\frac{2ln}{am^2+bn^2+l^2}.$$

Obţinem:

$$\frac{X}{W}=\frac{am^2+bn^2-l^2}{am^2+bn^2+l^2}, \ \frac{Y}{W}=\frac{2lm}{am^2+bn^2+l^2}, \ \frac{Z}{W}=\frac{2ln}{am^2+bn^2+l^2},$$

deci:

$$\frac{X}{am^2+bn^2-l^2}=\frac{Y}{2lm}=\frac{Z}{2nl}=\frac{W}{am^2+bn^2+l^2}=k, \quad k \in \mathbb{N}^*.$$

Soluţiile căutate sunt:

$$X = k\left(am^2 + bn^2 - l^2\right),\ Y = 2klm,\ Z = 2kln,\ W = k\left(am^2 + bn^2 + l^2\right),$$

care sunt identice cu cele date de *Euler* dacă facem abstracţie de factorul k şi de semnul diferit al lui X.

Remarcăm şi că, atunci când obţinem $X < 0$ îl înlocuim cu $-X$ şi soluţia va fi formată numai din numere naturale.

Verificarea ecuaţiei de către soluţiile găsite face inutilă orice analiză legată de parametri şi, totodată, ne asigură că acestea sunt soluţiile întregi în cazul când $a, b, l, m, n, k \in \mathbb{Z}$; soluţiile naturale sunt $|X|$, $|Y|$, $|Z|$, $|W|$.

Este posibil ca *Euler* să fi folosit chiar această metodă pentru obţinerea soluţiilor şi, dat fiind că este atât de simplă, n-a mai considerat necesar s-o menţioneze.

Observaţii: a) Avem identitatea:

$$(am^2 + bn^2 - l^2)^2 + a(2lm)^2 + b(2nl)^2 = (l^2 + am^2 + bn^2)^2, a, b, l, m, n \in \mathbb{Z}.$$

b) Putem aplica această metodă pentru rezolvarea tuturor ecuaţiilor diofantice reductibile la forma:

$$X_0^2 + a_1X_1^2 + a_2X_2^2 + ... + a_nX_n^2 = Y^2,\ a_1, a_2, ..., a_n, X_0, X_1, ..., X_n, Y \in \mathbb{N}. \quad (2)$$

Aplicaţii. Să rezolvăm prin metoda lui *Ţiţeica* câteva probleme de acest tip, apărute recent în Gazetă.

E:25718 (G.M. 2/2007, *Gigel Buth*, Satu Mare). *Demonstraţi că ecuaţia $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ are o infinitate de soluţii raţionale.*

Soluţie. Notăm S mulţimea tripletelor reale care verifică ecuaţia $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Evident că $A(1, 0, 0) \in S$. O dreaptă care trece prin A are ecuaţia:

$$\frac{x-1}{l} = \frac{y}{m} = \frac{z}{n},$$

iar $\overrightarrow{v} = (l, m, n)$ este vectorul său director. Dreapta mai întâlneşte S într-un punct B de coordonate:

$$x = \frac{m^2 + n^2 - l^2}{l^2 + m^2 + n^2}, y = -\frac{2ml}{l^2 + m^2 + n^2}, z = -\frac{2nl}{l^2 + m^2 + n^2},$$

care sunt numere raţionale dacă $l, m, n \in \mathbb{Q}^*$.

Luând $l = m = 1$, $n \in \mathbb{N}^*$, obţinem:

$$x = \frac{n^2}{2 + n^2},\ y = -\frac{2}{2 + n^2},\ z = -\frac{2n}{2 + n^2},\ x, y, z \in \mathbb{Q}^*$$

şi, prin urmare, avem o infinitate de soluţii care îndeplinesc cerinţa.

O:1168 (G.M. nr. 8/2007, *Vasile Scurtu*, Bistriţa). *Demonstraţi că ecuaţia $x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 = 1$, unde $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, are o infinitate de soluţii raţionale.*

Soluţie. Punctul $A(1,0,0,\ldots,0) \in S$, unde am notat cu S mulţimea soluţiilor reale ale ecuaţiei $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = 1$ din spaţiul n-dimensional. O dreaptă (d) care trece prin A are ecuaţia:

$$\frac{x_1 - 1}{l_1} = \frac{x_2}{l_2} = ... = \frac{x_n}{l_n},$$

unde $\overrightarrow{v} = (l_1, l_2, \ldots, l_n)$ este vectorul director al dreptei şi, dacă $l_k \in \mathbb{Q}^*$, $k \in \{1, 2, ..., n\}$, atunci dreapta mai intersectează (S) într-un punct B având toate coordonatele raţionale. Prin calcul simplu obţinem:

$$x_1 = \frac{l_2^2 + \ldots + l_n^2 - l_1^2}{l_1^2 + l_2^2 + \ldots + l_n^2}, x_2 = \frac{-2l_1 l_2}{l_1^2 + l_2^2 + \ldots + l_n^2}, \ldots, x_n = \frac{-2l_1 l_n}{l_1^2 + l_2^2 + \ldots + l_n^2}.$$

Cum $l_k \in \mathbb{Q}^*, k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, avem astfel o infinitate de soluţii raţionale pentru ecuaţia $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = 1$. Spre exemplu, putem alege $l_1 = m$, $m \in \mathbb{N}^*$ şi $l_2 = l_3 = \ldots = l_n = 1$.

E:13498 (G.M. nr. 8/2007, *Vasile Scurtu*, Bistriţa). *Demonstraţi că ecuaţia* $x^2 + yz + 2z^2 = 1$, *admite o infinitate de soluţii de forma* (x_0, y_0, z_0), *unde* $x_0, y_0, z_0 \in \mathbb{Q}_+ \setminus \mathbb{Z}$.

Soluţie. Notăm S mulţimea tripletelor reale care verifică ecuaţia $x^2 + yz + 2z^2 = 1$. Avem $A(1,0,0) \in S$. O dreaptă care trece prin A are ecuaţia $\dfrac{x-1}{l} = \dfrac{y}{m} = \dfrac{z}{n}$ iar $\overrightarrow{v} = (l, m, n)$ este vectorul său director. Dreapta mai întâlneşte S într-un punct B de coordonate:

$$x = \frac{mn + 2n^2 - l^2}{l^2 + mn + 2n^2}, y = -\frac{2ml}{l^2 + mn + 2n^2}, z = -\frac{2nl}{l^2 + mn + 2n^2},$$

care sunt numere raţionale dacă $l, m, n \in \mathbb{Q}$.

Restricţia $x_0, y_0, z_0 \in \mathbb{Q}_+ \setminus \mathbb{Z}$ este îndeplinită dacă alegem $l = -1$, $n = 1$, $m \in \mathbb{N}^* \setminus \{3\}$, obţinând:

$$x_0 = \frac{m+1}{m+3}, \; y_0 = \frac{2m}{m+3}, \; z_0 = \frac{2}{m+3}.$$

BIBLIOGRAFIE

[1] Gh. Iurea, *Câteva probleme de existenţă*, G.M.-B nr.12/2009;
[2] Gh. Ţiţeica, *Rezolvarea în numere întregi a ecuaţiei* $X^2 + Y^2 = Z^2$, G.M.-B nr. 3/1908, reluat în G.M.-B nr. 2/2009.