O CLASĂ DE ECUAŢII FUNCŢIONALE

MARIAN ANDRONACHE[1)], DAN-ŞTEFAN MARINESCU[2)], MIHAI PITICARI[1)]

Abstract. This article presents a classs of functional equations which generalize some contest problems.

Keywords: continuous function, monotonic function.

MSC : 26A15,26A48,26A51

1. Introducere

În ultimii ani, la concursurile şcolare sau în reviste de specialitate au fost propuse o serie de probleme care au o trăsătură comună. Acest gen de probleme este ilustrat de următoarele exemple:

P$_1$ ([2], O.N.M. 1998, *M. Piticari*). Fie $a, b \in (0, \infty)$ cu $a + b < 1$ şi $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ o funcţie crescătoare, astfel încât

$$\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{ax} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^{bx} f(t)\,\mathrm{d}t, \qquad \forall\, x \in [0, \infty).$$

Să se arate că $f(x) = 0$.

În [1], *V. Berinde* lansează, legat de această problemă, conjectura următoare:

C$_1$. Dacă $F : [0, \infty) \to [0, \infty)$ este o funcţie continuă care verifică $F(x) = F(ax) + F(bx)$ pentru orice $x \in [0, \infty)$, unde a, b verifică condiţiile din P$_1$, atunci $F(x) = 0$, $\forall\, x \in [0, \infty)$.

[1)]Profesor, Colegiul Naţional „Sf. Sava“, Bucureşti

[2)]Profesor dr., Colegiul Naţional „Iancu de Hunedoara“, Hunedoara

[1)]Profesor,Colegiul Naţional „Dragoş Vodă“, Câmpulung Moldovenesc

$\mathbf{P_2}$ ([3], O.J.M. 2004, *D. Marinescu*). Fie $a, b \in (0,1)$ şi $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă, astfel încât:

$$\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{ax} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^{bx} f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{pentru orice } x \in [0,1).$$

a) Arătaţi că, dacă $a + b < 1$, atunci $f(x) = 0$
b) Demonstraţi că, dacă $a + b = 1$, atunci f este constantă.

$\mathbf{P_3}$ (*G. Dospinescu*). Fie $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ şi $a_1, a_2, \ldots, a_n \in (0,1)$ cu $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 1$. Să se determine funcţiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cu proprietatea:

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = 1 \text{ şi } f(x) = f(a_1 x) + \cdots + f(a_n x) \text{ pentru orice } x \in \mathbb{R}.$$

$\mathbf{P_4}$ (*Viorel Radu*). Determinaţi toate funcţiile continue $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cu proprietatea că pentru orice $x \in \mathbb{R}$ există $a, b \in (0,1)$ cu $a + b = 1$ şi $g(x) = ag(ax) + bg(bx)$.

În continuare, urmând ideile din aceste probleme, vom rezolva o clasă de ecuaţii funcţionale.

2. Ecuaţii funcţionale

Un prim rezultat este legat de problema P_4.

Propoziţia 2.1. *Dacă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este o funcţie continuă pe $\mathbb{R}$ şi, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, există $n \in \mathbb{R}$, $n \geq 2$ şi $a_1, a_2, \ldots, a_n \in (0,1)$ astfel ca:*

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 1 \quad \text{şi} \quad f(x) = a_1 f(a_1 x) + \cdots + a_n f(a_n x).$$

atunci f este constantă.

Demonstraţie: Fie $x > 0$ şi

$$M = \sup_{y \in [0,x]} f(y),\ A = \{y \in [0,x] : f(y) = M\},$$
$$m = \inf_{y \in [0,x]} f(y),\ B = \{y \in [0,x] : f(y) = m\}.$$

În mod cert, mulţimile A şi B sunt nevide.

Vom arăta că $\inf A = \inf B = 0$, de unde va rezulta, în baza continuităţii funcţiei f, că $m = M$, adică f este constantă.

Notăm $\alpha = \inf A$. Există un şir $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ cu $a_n \in A$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$ şi $\lim\limits_{n \to \infty} \alpha_n = \alpha$. În acest caz, $f(\alpha) = \lim\limits_{n \to \infty} f(\alpha_n) = M$.

Dacă $\alpha > 0$, atunci există $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ şi $a_1, a_2, \ldots, a_n \in (0,1)$ cu $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 1$ şi $f(\alpha) = a_1 f(a_1 \alpha) + \ldots + a_n f(a_n \alpha)$.

Cum $a_1 \alpha, \ldots, a_n \alpha < \alpha$, din definiţia lui α găsim că $f(a_1 \alpha) < M, \ldots, f(a_n \alpha) < M$ şi, în concluzie, $M = f(\alpha) < a_1 M + \cdots + a_n M = M$, ceea ce este imposibil. În consecinţă $\alpha = 0$ şi atunci $M = f(0)$.

În mod analog se arată că $m = f(0)$, adică $m = M$ şi, în concluzie, g este constantă pe $[0, x]$. Dacă $x < 0$ se aplică acelaşi raţionament pe $[x, 0]$. Cum funcţiile constante au proprietatea din enunţ, concluzia Propoziţiei 2.1 se impune.

Următorul rezultat se referă la o ecuaţie funcţională înrudită cu cea din Propoziţia 2.1.

Corolarul 2.2. Dacă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este o funcţie continuă pe $\mathbb{R}$, derivabilă în origine şi pentru orice $x \in \mathbb{R}$ există $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ şi $a_1, a_2, \ldots, a_n \in (0, 1)$ cu $a_1 + \ldots + a_n = 1$ astfel ca:

$$f(x) = f(a_1 x) + \cdots + f(a_n x)$$

atunci $f(x) = f^{'}(0) \cdot x$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Demonstraţie. Fie $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)}{x}, & \text{pentru } x \neq 0 \\ k, & \text{pentru } x = 0 \end{cases},$$

unde $k = f^{'}(0)$.

Atunci, pentru orice $x \in \mathbb{R}$ există $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ si $a_1, a_2, \ldots, a_n \in (0, 1)$, cu $a_1 + \cdots + a_n = 1$, astfel ca

$$g(x) = a_1 g(a_1 x) + \cdots + a_n g(a_n x).$$

Cum g este continuă pe $\mathbb{R}$, din Propoziţia 2.1 se deduce că g este constantă pe $\mathbb{R}$, de unde $f(x) = kx$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

În cazul în care în Propoziţia 2.1 ponderile sunt fixate *ab initio*, atunci funcţia f se poate determina în condiţii mai generale. Propoziţia care urmează rezolvă acest caz.

Propoziţia 2.3. Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, şi numerele $a_1, a_2, \ldots, a_n \in (0, 1)$, cu $a_1 + \ldots + a_n = 1$.

Dacă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este o funcţie care are limite laterale finite în origine şi

$$f(x) = a_1 f(a_1 x) + \cdots + a_n f(a_n x) \text{ pentru orice } x \in \mathbb{R},$$

atunci:

$$f(x) = \begin{cases} f(0-0), & x < 0 \\ f(0+0), & x > 0 \end{cases},$$

unde $f(0-0)$ este limita la stânga în 0 iar $f(0+0)$ este limita la dreapta în 0.

Demonstraţie. Fie $l = f(0+0)$, $x > 0$ şi $\varepsilon > 0$. Vom arăta că $|f(x) - l| < \varepsilon$.

Pentru început arătăm că, oricare ar fi $m \in \mathbb{N}^*$, are loc egalitatea

$$f(x) = \sum_{\substack{m_1 \geq 0,\ldots,m_n \geq 0 \\ m_1+\ldots+m_n=m}} \frac{m!}{m_1! \cdot \cdots \cdot m_n!} \cdot a_1^{m_1} \cdot \ldots \cdot a_n^{m_n} \cdot f\left(a_1^{m_1} \cdot \ldots \cdot a_n^{m_n} x\right). \quad (1)$$

Pentru $m = 1$, afirmaţia de mai sus este egalitatea din enunţ.

Admitem relaţia adevărată pentru un $m \in \mathbb{N}^*$ şi demonstrăm că este adevărată şi pentru $m+1$. Pentru aceasta, în egalitatea presupusă adevărată pentru m, înlocuim succesiv pe x cu a_1x, a_2x, $\ldots$, a_nx şi adunând aceste egalităţi ajungem la valabilitatea egalităţii si pentru $m + 1$. Conform cu inducţia matematică completă, egalitatea are loc pentru orice $m \in \mathbb{N}$.

Cum $f(0+0) = l$ şi $\varepsilon > 0$, există $\delta > 0$ astfel ca:

$$| f(t) - l | < \varepsilon, \qquad \text{pentru orice } t \in (0, \delta) \quad (2)$$

Din $m_1 + \cdots + m_n = m$ şi $(a_1^{m_1} \cdot \ldots \cdot a_n^{m_n}) < (\max(a_1, \ldots, a_n))^m$ găsim că pentru $\delta > 0$ există $m_0 \in \mathbb{N}$ astfel ca oricare ar fi $m \geq m_0$ şi $m_1 + \cdots + m_n = m$ să avem $a_1^{m_1} \cdot \cdots \cdot a_n^{m_n} \cdot x \in (0, \delta)$ şi, în consecinţă, conform cu:

$$|f(a_1^{m_1} \cdot \cdots \cdot a_n^{m_n} x) - l| < \varepsilon. \quad (3)$$

Din (1) şi (3) obţinem că pentru orice $m \geq m_0$ şi $m_1, \ldots, m_n \in \mathbb{N}$ cu $m_1 + \cdots + m_n = m$ avem:

$$|f(x) - l| \leq \sum_{\substack{m_1 \geq 0,\ldots,m_n \geq 0 \\ m_1+\ldots+m_n=m}} \frac{m!}{m_1! \cdot \cdots \cdot m_n!} \cdot a_1^{m_1} \cdot \cdots \cdot a_n^{m_n} \cdot |f(a_1^{m_1} \ldots a_n^{m_n} x) - l| <$$

$$< \varepsilon \cdot \sum_{\substack{m_1 \geq 0,\ldots,m_n \geq 0 \\ m_1+\ldots+m_n=m}} \frac{m!}{m_1! \cdot \cdots \cdot m_n!} \cdot a_1^{m_1} \cdot \cdots \cdot a_n^{m_n} = \varepsilon (a_1 + \cdots + a_n)^m = \varepsilon.$$

Cum ε a fost ales arbitrar, deducem că $f(x) = l$.

Mutatis mutandis obţinem că, dacă $x < 0$, atunci $f(x) = f(0-0)$. În origine f poate lua orice valoare şi cu aceasta Propoziţia 2.3 este demonstrată.

Corolarul 2.4. Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ şi numerele $a_1, a_2, \ldots, a_n \in (0,1)$ cu $a_1 + \cdots + a_n = 1$. Dacă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este o funcţie care are derivate laterale finite în origine şi $f(x) = f(a_1x) + \cdots + f(a_nx)$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$, atunci:

$$f(x) = \begin{cases} f_{\mathrm{s}}'(0) \cdot x, lx < 0 \\ 0, lx = 0 \\ f_{\mathrm{d}}'(0) \cdot x, lx > 0 \end{cases}.$$

Demonstraţie. Fie $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)}{x}, & \text{pentru} \quad x \neq 0 \\ k, & \text{pentru} \quad x = 0 \end{cases}$, cu $k \in \mathbb{R}$.

Funcţia g are limite laterale finite în 0 deoarece $f(0) = 0$ şi f are derivate laterale finite în 0. Cum, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, g verifică:

$$g(x) = a_1 g(a_1 x) + \cdots + a_n g(a_n x),$$

din Propoziţia 2.3 suntem condusi la concluzia Corolarului 2.4.

În cele ce urmează vom aborda aceleaşi ecuaţii funcţionale în cazul funcţiilor monotone.

Propoziţia 2.5. Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ şi numerele $a_1, a_2, \ldots, a_n \in (0,1)$ cu $a_1 + \cdots + a_n \leq 1$. Dacă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este o funcţie monotonă astfel ca $f(x) = a_1 f(a_1 x) + \cdots + a_n f(a_n x)$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$, atunci:

(1) f este funcţia nulă când $a_1 + \cdots + a_n < 1$;

(2) f este constantă pe $(-\infty, 0)$ şi pe $(0, \infty)$ când $a_1 + \cdots + a_n = 1$.

Demonstraţie. (1) Vom trata numai cazul în care f este crescătoare.

Cum $f(0) = 0$ deducem că $f(x) \geq 0$ pentru $x \geq 0$. Apoi, prin adunarea relaţiilor $a_1 f(x) \geq a_1 f(a_1 x)$, ..., $a_n f(x) \geq a_n f(a_n x)$ obţinem:

$$(a_1 + \ldots + a_n - 1) \cdot f(x) \geq 0,$$

de unde $f(x) = 0$.

Dacă $x < 0$ atunci $f(x) \leq 0$ şi acelaşi raţionament ne conduce la:

$$a_1 f(x) \leq a_1 f(a_1 x), \ldots, a_n f(x) \leq a_n f(a_n x),$$

inegalităţi care prin adunare conduc la $(a_1 + \cdots + a_n - 1) \cdot f(x) \leq 0$, de unde $f(x) = 0$.

În concluzie, f este funcţia nulă.

(2) Cum f este monotonă, atunci există şi sunt finite $f(0-0)$ si $f(0+0)$ şi se aplică Propoziţia 2.3.

3. Aplicaţii

$\mathbf{A_1}$. (*O generalizare a problemei* $\mathbf{P_1}$ *şi a problemei* 23*d a lui V. Berinde din* [1]). Dacă $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $a_1, a_2, \ldots, a_n \in (0,1)$, $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ este o funcţie crescătoare şi

$$\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{a_1 x} f(t)\,\mathrm{d}t + \cdots + \int_0^{a_n x} f(t)\,\mathrm{d}t, \qquad \forall\, x \in [0, \infty)$$

atunci f este funcţia nulă dacă $a_1 + \cdots + a_n < 1$ şi f este constantă pe $(0, \infty)$ dacă $a_1 + \cdots + a_n = 1$.

Soluţie. Cum f este crescătoare, funcţia $F : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ definită prin:

$$F(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t)\, dt$$

este crescătoare şi pozitivă, iar $F(0+0) = f(0+0) = l$. Atunci funcţia $G : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, este crescătoare şi $G(x) = a_1 G(a_1 x) + \cdots + a_n G(a_n x)$, adică G verifică condiţiile din Propoziţia 2.7, de unde concluzia.

A$_2$. (Concursul A. Myller 2003, *M. Piticari*). Să se determine funcţiile derivabile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care verifică:

$$f(0) = 0 \text{ şi } f'(x) = \frac{1}{3} f'\left(\frac{1}{3}x\right) + \frac{2}{3} f'\left(\frac{2}{3}x\right), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Soluţie. Din ipoteză deducem că există $c \in \mathbb{R}$ astfel ca:

$$f(x) = f\left(\frac{1}{3}x\right) + f\left(\frac{2}{3}x\right) + c$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Cum $f(0) = 0$, deducem că $f(x) = f\left(\frac{1}{3}x\right) + f\left(\frac{2}{3}x\right)$ şi, cum $\frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1$, suntem în ipotezele Corolarului 2.4, deci există $k \in \mathbb{R}$ astfel încât $f(x) = kx$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

A$_3$. Problemele **P$_3$**, **P$_4$** sunt cazuri particulare ale rezultatelor cuprinse în paragraful al doilea.

BIBLIOGRAFIE

[1] V. Berinde, *Explorare, investigare şi descoperire în matematică*, Ed. Efemeride 2001.
[2] Romanian Mathematical Competitions, 1998
[3] Romanian Mathematical Competitions, 2004