PROBLEME PENTRU EXAMENE NAŢIONALE[1)]

Clasa a VII-a

1. Calculaţi cel mai mare divizor comun al numerelor 108 şi 72.

2. Dacă $a+b=7$ şi $a^2-b^2=35$, aflaţi $a-b$.

3. Scrieţi numărul 79 ca produs de trei numere întregi diferite.

4. Pentru ce valori ale lui m, număr real, ecuaţia $3x+m=2$ are soluţia -1?

5. Aria unui triunghi este 16 cm^2. Aflaţi aria triunghiului format de liniile mijlocii.

6. Este adevărată afirmaţia ,,Dacă o dreaptă formează cu două dintre laturile unui triunghi, un triunghi asemenea cu triunghiul dat, atunci ea este paralelă cu a treia latură"? Justificaţi răspunsul dat.

Clasa a VIII-a

7. Care este cel mai mare număr întreg, mai mic decât $\sqrt{2}+\sqrt{3}$?

8. Dacă $a-b=7$ calculaţi a^2+b^2-2ab.

9. Verificaţi dacă punctul $M(-1;\ 3)$ aparţine reprezentării grafice a funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=-x+2$.

10. O prismă dreaptă cu înălţimea de 4 cm are aria laterală 20 cm^2 şi aria totală egală cu 30 cm^2. Care este volumul prismei?

11. Aflaţi aria totală a unui cub cu lungimea diagonalei egală cu $7\sqrt{3}$.

12. Aflaţi lungimea laturii unui cub în care aria totală şi volumul se exprimă prin acelaşi număr real.

Clasa a IX-a

13. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x-1$. Să se calculeze suma $f(1)+f(2)+\cdots+f(99)$.

14. Există funcţii $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ cu proprietatea că $f(x)+f(4-x)=x^2$?

15. Să se determine numărul funcţiilor impare $f:\{-1,0,1\}\to\{-1,0,1\}$.

16. Fie $ABCDEF$ un hexagon. Să se descompună vectorul $\overrightarrow{AB}$ după direcţiile vectorilor $\overrightarrow{AC}$ şi $\overrightarrow{DF}$.

17. Fie ABC un triunghi şi O centrul cercului circumscris. Să se arate că dacă $|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}|=|\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA}|$, atunci triunghiul este echilateral.

[1)] La problemele din această rubrică nu se primesc soluţii.

18 Să se determine funcţiile $f : [0, 1] \to [0, 1]$ pentru care $|f(x)-f(y)| \geq$ $\geq |x - y|$, oricare ar fi x, $y \in [0, 1]$.

Clasa a X-a

19. Să se determine inversa funcţiei $f : [-1, \infty) \to [-1, \infty)$ definită prin $f(x) = -1 + \sqrt{x + 1}$.

20. Să rezolve ecuaţia $\sqrt[3]{1 + 3x} + \sqrt[3]{4 + 5x} = 0$.

21. Să se arate că $\log_2(a + b) \leq \dfrac{1}{2} + \log_4(a^2 + b^2)$.

22. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie bijectivă şi impară. Să se arate că inversa f^{-1} este funcţie impară.

23. Să se rezolve ecuaţia $6^x + 2 = 2^x + 2 \cdot 3^x$.

24. Considerăm funcţiile $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ astfel încât $f(g(f(x))) = x$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$. Să se arate că funcţia g este inversabilă.

Clasa a XI-a

25. Fie mulţimea $M = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid A^2 = A^t\}$, unde A^t este transpusa matricei A.

a) Să se arate că matricea $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ aparţine lui M.

b) Fie A o matrice inversabilă din M. Să se calculeze $\det(A)$.

c) Fie $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M$ cu $\det(A) = 0$. Să se arate că $a^2 + b^2 - a = 0$.

26. Fie funcţia $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$.

a) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x) - x)$.

b) Să se determine asimptotele graficului funcţiei.

c) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$.

Clasa a XII-a

27. Fie corpul $(\mathbb{Z}_7, +, \cdot)$ şi mulţimea $H = \{x^3 \mid x \in \mathbb{Z}_7\}$.

a) Să se rezolve ecuaţia $\hat{2}x + \hat{4} = \hat{1}$ în $\mathbb{Z}_7$.

b) Să se determine toate elementele mulţimii H.

c) Să se determine toate perechile $(x, y) \in \mathbb{Z}_7 \times \mathbb{Z}_7$ pentru care:

$$x^3 + \widehat{4}y^3 = \widehat{0}.$$

28. Fie funcţia $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x+1}$.

a) Să se arate că orice primitivă a funcţiei f este concavă.

b) Să se calculeze $\displaystyle\int_0^1 \frac{f(x)}{(x+1)^2}\mathrm{d}x$. c) Să se calculeze $\displaystyle\int_x^{x+2} f(t)\mathrm{d}t$.