[3] D. Pompeiu, *Sur le Théoréme des accroissements finis* (premieres note), Ann. Sci. De l'Universite de Jassy, 3, 244-250, 1906.
[4] E. Popoviciu, *Teoreme de medie din analiza matematică şi legătura lor cu teoria interpolării*, Editura Dacia, Cluj 1972.
[5] T.R. Rockafellar, *Analiza convexă*, Editura Theta, Bucureşti, 2002.
[6] *Romanian Mathematical Competitions*, Editura Theta, Bucureşti, 2010.
[7] *Romanian Mathematical Competitions*, Editura Theta, Bucureşti, 2011.
[8] I. Savu, *Trei teoreme celebre de analiză matematică*, Gazeta Matematică Seria B nr. 9/1995.

PENTRU CERCURILE DE ELEVI

CÂTEVA PROBLEME DE COMBINATORICĂ A MULŢIMILOR

MANUELA PRAJEA [1)]

Scopul lecţiei de faţă este acela de a evidenţia câteva tehnici de numărare utile în soluţionarea unor probleme dificile, bazate pe utilizarea regulii produsului, şi acela de a prezenta o categorie de probleme adecvate, noi în mare parte, capabile să provoace ingeniozitatea şi experienţa cititorului, elev sau profesor, iubitor de combinatorică.

Exemplul 1. *Să se determine numărul perechilor de mulţimi* (A, B) *care satisfac relaţia* $A \cup B = \{1, 2, \ldots, n\}$*, unde* $n \in \mathbb{N}^*$.

Soluţia 1. Pentru $k \in \overline{0, n}$ fixat, mulţimea A poate fi aleasă în C_n^k moduri, iar mulţimea B va fi de forma $B = (\{1, 2, \ldots, n\} \setminus A) \cup X$, unde $X \subseteq A$, deci B poate fi aleasă în 2^k moduri. Numărul perechilor (A, B) este prin urmare $\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k 2^k = 3^n$.

Soluţia 2. Numărul perechilor (A, B) coincide cu numărul modalităţilor de dispunere a elementelor $1, 2, \ldots, n$ în tripletul de mulţimi disjuncte două câte două $(A \setminus B, A \cap B, B \setminus A)$. Astfel, elementul 1 poate fi distribuit în 3 moduri, elementul 2 în 3 moduri, etc. Din regula produsului avem 3^n moduri.

Soluţia 3. Considerăm *matricea de incidenţă* a perechii (A, B), sugerată de funcţia caracteristică a unei mulţimi, adică matricea $(\alpha_{ij}) \in M_{2,n}(\mathbb{R})$ definită prin $\alpha_{1i} = \begin{cases} 1, & \text{dacă } i \in A \\ 0, & \text{dacă } i \notin A \end{cases}$ şi $\alpha_{2i} = \begin{cases} 1, & \text{dacă } i \in B \\ 0, & \text{dacă } i \notin B \end{cases}$.

[1)] Prof.dr., Colegiul Naţional „Traian", Drobeta Tr. Severin

Astfel matricea de incidenţă $\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \end{pmatrix}$ poate fi completată pe fiecare coloană în 3 moduri (excepţie face completarea cu 0,0), deci din regula produsului obţinem 3^n moduri de completare, adică 3^n perechi (A, B).

Exemplul 2. *Să se determine numărul tripletelor de mulţimi* (A, B, C) *pentru care* $A \cup B \cup C = \{1, 2, \dots, 10\}$ *şi* $A \cap B \cap C = \emptyset$.

Putnam Competition

Soluţia 1. Considerăm matricea de incidenţă a tripletului (A, B, C) şi observăm că fiecare linie se poate completa în $2^3 - 2$ moduri (deoarece nu putem completa cu 0, 0, 0 sau 1, 1, 1), deci avem în final 6^{10} triplete (A, B, C).

Soluţia 2. Dacă $E = \{1, 2, \dots, 10\}$ şi (A, B, C) este un triplet de submulţimi oarecare din E, atunci

$$A \cap B \cap C, \overline{A} \cap B \cap C, A \cap \overline{B} \cap C, A \cap B \cap \overline{C},$$
$$\overline{A} \cap \overline{B} \cap C, \overline{A} \cap B \cap \overline{C}, A \cap \overline{B} \cap \overline{C}, \overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$$

este o partiţie a mulţimii E. Fiecare element din E poate fi distribuit în oricare din cele 8 mulţimi ale partiţiei, cu excepţia primei şi ultimei submulţimi din partiţie. Avem conform regulii produsului 6^{10} posibilităţi, deci 6^{10} triplete (A, B, C).

Exemplul 3. *Să se determine numărul matricelor de ordinul* n (*unde* $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$) *având rangul unu şi elementele din mulţimea* $\{0, 1\}$.

Soluţie. Dacă L_1 (prima linie a matricei) este nenulă, avem $2^n - 1$ posibilităţi de completare a acesteia cu elementele 0 şi 1. Pe de altă parte, fiecare din celelalte linii ale matricei va trebui să fie proporţională cu prima linie, deci va avea două posibilităţi de completare corespunzătoare factorilor de proporţionalitate posibili 0 şi 1. Cu regula produsului avem $(2^n - 1)\, 2^{n-1}$ matrice cu $L_1 \neq 0$.

Dacă $L_1 = 0$, $L_2 \neq 0$, în virtutea raţionamentului anterior obţinem $(2^n - 1)\, 2^{n-2}$ matrice. Continuând cu $L_1 = 0$, $L_2 = 0$, $L_3 \neq 0$ obţinem $(2^n - 1)\, 2^{n-3}$matrice, …, în fine, pentru $L_1 = L_2 = \ldots = L_{n-1} = 0, L_n \neq 0$ avem $2^n - 1$ matrice.

Finalizând, avem un număr de:

$$(2^n - 1)\, 2^{n-1} + (2^n - 1)\, 2^{n-2} + \ldots + (2^n - 1) = (2^n - 1)^2$$

matrice care verifică condiţiile problemei.

Probleme propuse

1. Dacă $m, n \in \mathbb{N}^*$, să se determine numărul $n-$uplurilor de mulţimi $(A_1, A_2, \dots, A_n)$ pentru care $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \subseteq \{1, 2, \dots, m\}$.

2. Să se determine numărul perechilor de mulţimi (A, B) care îndeplinesc condiţiile:

$$A \cup B \subseteq \{1, 2, \ldots, 2011\}, \quad A \backslash B \subseteq \{1, 2, \ldots, 1005\}, \quad A \cap B = \emptyset.$$

Manuela Prajea, Concursul Gazeta Matematică şi ViitoriOlimpici.ro

3. Să se determine numărul n-uplurilor $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ cu proprietăţile $A_i \neq \emptyset, i \in \overline{1,n}$, $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i = \emptyset$ şi $A_i \cup A_j = \{1, 2, \ldots, m\}, \forall i, j \in \overline{1,n}, i \neq j$ (unde $m, n \in \mathbb{N}^*$).

4. Să se determine numărul n-uplurilor de mulţimi $(A_1, A_2, ..., A_n)$ cu $A_i \neq \emptyset, i \in \overline{1,n}$, $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i = \emptyset$ şi $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i \subseteq \{1, 2, \ldots, m\}$ (unde $m, n \in \mathbb{N}^*$).

5. Fie E o mulţime cu n elemente, P mulţimea părţilor mulţimii E şi $k \in \{1, 2, ..., n\}$. Să se arate că:

$$\sum_{(E_1,\ldots,E_k) \in P^k} |E_1 \cap E_2 \cap \ldots \cap E_k| = n \cdot 2^{k(n-1)}.$$

6. Să se determine numărul n-uplurilor de mulţimi $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ pentru care $A_i \neq \emptyset, i \in \overline{1,n}$ şi $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i = \{1, 2, \ldots, m\}$ (unde $m, n \in \mathbb{N}^*$).

7. Câte numere de $n \geq 2$ cifre au proprietatea că suma cifrelor de rang par este egală cu suma cifrelor de rang impar?

8. Să se determine numărul matricilor de ordinul $n \geq 2$ având rangul unu şi elementele din mulţimea $\{0, 1, 2\}$.

Manuela Prajea, Concursul interjudeţean „Petre Sergescu“

9. Fie o mulţime M cu $n \geq 3$ elemente. Să se determine numărul perechilor (X, Y) de submulţimi proprii nevide ale lui M, pentru care $X \subset Y$ şi $X \neq Y$.

Vasile Pop, Concursul interjudeţean „Argument“

BIBLIOGRAFIE

[1] M. Bălună, M. Becheanu, Gh. Eckstein, B. Enescu, R. Gologan, I. Savu, I. Tomescu, M. Ţena, *Zece lecţii alese de matematică elementară*, Editura Paralela 45, Piteşti, 1998.

[2] $* * *$ Gazeta Matematică, 2010

[3] I. Savu, S. Rădulescu, D. Şt. Marinescu, M. Prajea, C. Chiteş, L. Ioana, V. Paterău, *Probleme pregătitoare pentru olimpiadele şcolare*, Editura Art, 2006.