Clasa a VII-a

1. Aflaţi numărul elementelor din mulţimea $A = \left\{ x \in \mathbb{Z} \,\middle|\, \frac{102}{x} \in \mathbb{Z} \right\}$.

2. Scrieţi ca fracţie ordinară ireductibilă numărul $0,00(3)$.

3. Calculaţi 14% din 158.

4. Aflaţi măsurile unghiurilor unui triunghi ştiind că sunt direct proporţionale cu 3, 5 şi 10.

5. În triunghiul ABC, M este un punct pe latura AB. Perimetrele triunghiurilor ACM şi BCM sunt egale cu 28 cm, respectiv 32 cm. Dacă perimetrul triunghiului ABC este 40 cm, aflaţi lungimea segmentului CM.

---

[1] La problemele din această rubrică nu se primesc soluţii.

6. În paralelogramul $ABCD$ avem $BD \perp AD$, $m(\sphericalangle DBA) = 30^0$ şi $BC = 5$ cm. Aflaţi perimetrul paralelogramului.

Clasa a VIII-a

7. Câţi divizori întregi are numărul 2012?

8. Aflaţi a 50-a zecimală a numărului $\dfrac{13}{11}$.

9. Determinaţi numărul x din proporţia $\dfrac{x-1}{6} = \dfrac{9}{2}$.

10. Aflaţi măsurile unghiurilor unui patrulater ştiind că sunt direct proporţionale cu 2, 3, 5 şi 8.

11. În triunghiul ABC, M este mijlocul lui $[BC]$, iar N este mijlocul lui $[AC]$. Dacă aria triunghiului ABC este egală cu 60 cm^2, aflaţi aria triunghiului AMN.

12. În paralelogramul $ABCD$ avem $BD \perp AD$, $m(\sphericalangle DBA) = 30^0$ şi $BC = 6$ cm. Aflaţi aria paralelogramului.

Clasa a IX-a

13. Fie a, b, c trei zecimale consecutive ale numărului $4/37$. Să se calculeze $a^2 + b^2 + c^2$.

14. Fie $a, b \in [2, \infty)$. Să se arate că $(ab-1)(a+b) \geq 3ab$.

15. Numerele 2 şi 19 sunt termeni ai unei progresii aritmetice de numere naturale. Să se calculeze raţia progresiei.

16. Şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este definit prin $a_1 = 3$ şi $a_{n+1} = \sqrt{5 + a_n}$. Să se arate că şirul este crescător.

17. Numerele prime p şi q verifică $\{\sqrt{p}\} = \{\sqrt{q}\}$. Să se arate că $p = q$.

18. Să se arate că şirul $a_n = \dfrac{1}{1\sqrt{1}} + \dfrac{1}{2\sqrt{2}} + \cdots + \dfrac{1}{n\sqrt{n}}$ este mărginit.

Clasa a X-a

19. Să se determine valorile reale ale lui x pentru care $\sqrt{x^2} = x + 1$.

20. Să se arate că numărul $\sqrt[3]{7 + 5\sqrt{2}} + \sqrt[3]{7 + 5\sqrt{2}}$ este natural.

21. Să se arate că numărul $\sqrt[n]{\sqrt{5} + 2} + \sqrt[n]{\sqrt{5} - 2}$ este iraţional pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

22. Să se calculeze modulul numărului $(\sqrt{3} + \mathrm{i})^3(1 + \mathrm{i})^4$.

23. Fie $z \in \mathbb{C}$ astfel încât $z + 2\bar{z} = 6 - \mathrm{i}$. Să se calculeze z^2.

24. Să se determine suma modulelor soluţiilor ecuaţiei:

$$z^2 - 0,1234z + 4 = 0.$$

Clasa a XI-a

25. Considerăm şirul $(a_n)_{n\geq 0}$ definit prin $a_0 = \alpha$ şi $a_{n+1} = \sqrt{6+a_n}$, $n \geq 0$.

a) Să se arate că dacă $\alpha < 3$, atunci şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este strict crescător.

b) Să se arate că dacă $\alpha > 3$, atunci şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este strict descrescător.

c) Să se arate că pentru orice $\alpha \in (0,\infty)$, şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este convergent la 3.

26. Fie n un număr natural nenul şi matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât $AB = BA$, unde $B = \begin{pmatrix} a & a \\ 3 & a \end{pmatrix}$.

b) Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât $(A + I_2)(A + mI_2) = O_2$.

c) Ştiind că există numerele reale a_n şi b_n astfel încât $A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ b_n & a_n \end{pmatrix}$, să se calculeze $a_n + b_n$.

Clasa a XII-a

27. Considerăm funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x^2 - 1|$.

a) Să se arate că orice primitivă a funcţiei f este strict crescătoare.

b) Fie F primitiva lui f cu $F(-2) = 0$. Să se calculeze $F(2)$.

c) Să se calculeze $\int f(x)\sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}x$, $x \in (1,\infty)$.

28. Se consideră legea de compoziţie "$\circ$" definită pe $\mathbb{R}$ prin $x \circ y = xy - 5x - 5y + 30$ şi fie $H = (5,\infty)$.

a) Să se arate că H este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ faţă de $\circ$.

b) Să se determine $u \in \mathbb{R}$ astfel încât $u \circ x = x \circ u = u$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

c) Să se arate că $(H, \circ)$ este grup abelian.

PROBLEME PENTRU CICLUL PRIMAR[1)]

P:518. Pe o foaie putem desena cel puţin 2 şi cel mult 7 cercuri, 4, 5 sau 6 triunghiuri şi de la 1 până la 9 pătrate. Care este cel mai mic număr de desene pe care trebuie să le realizăm pentru a avea două desene cu acelaşi număr de cercuri, triunghiuri şi pătrate?

* * *

[1)] Se primesc soluţii până la 31 martie 2013 (data poştei). (N.R.)