PORNIND DE LA O PROBLEMĂ DE ANALIZĂ

Manuela Prajea[1] şi Mihail Bălună[2]

În lecţia de faţă ne propunem ca, plecând de la un rezultat iniţial – în cazul de faţă o problemă din Gazeta Matematică – să obţinem câteva enunţuri şi demonstraţii referitoare la eventuale reciproce ale acestui rezultat. Apreciem că deprinderea unui asemenea exerciţiu de explorare a diverselor enunţuri matematice, constând în cercetarea reciprocelor sau rafinarea condiţiilor, este esenţială în pregătirea matematică a elevilor şi profesorilor.

Considerăm următoarea problemă.

Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie care este crescătoare şi are proprietatea că pentru orice $x \in \mathbb{R}$ avem:

$$\lim_{n\to\infty} f\left(x-\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty} f\left(x+\frac{1}{n}\right).$$

Arătaţi că f este continuă.

În vederea căutării unei reciproce in ipoteza căreia apare condiţia „*f este continuă*" şi cu concluzia „*f este crescătoare*", este evident atât că egalitatea $\lim\limits_{n\to\infty} f\left(x-\frac{1}{n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty} f\left(x+\frac{1}{n}\right)$ devine superfluă cât şi că, alături de condiţia de continuitate, în ipoteză trebuie inclusă o altă condiţie, eventual de tip discret, care să prefigureze monotonia funcţiei. Putem astfel obţine enunţul următor, propus de primul autor la concursul interjudeţean de matematică „Petre Sergescu", ediţia 2011.

Propozitia 1 : *Dacă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este o funcţie continuă şi, pentru orice $x \in \mathbb{R}$ şi orice $n \in \mathbb{N}^*$, avem:*

$$f(x) \le f\left(x+\frac{1}{n}\right),$$

atunci funcţia f este crescătoare.

Demonstraţie. Prin inducţie matematică se obţine:

$$f(x) \le f\left(x+\frac{m}{n}\right),$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}$ şi orice $m, n \in \mathbb{N}^*$.

Fie acum $x, y \in \mathbb{R}$ cu $x < y$ şi fie $(a_n)_{n\ge1}$ un şir de numere raţionale pozitive astfel ca $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = y - x$. Utilizând cele demonstrate anterior avem

[1] Profesor dr., Colegiul Naţional „Traian", Drobeta Tr.Severin
[2] Profesor, Colegiul Naţional „Mihai Viteazul", Bucureşti

$f(x) \le f(x + a_n)$ şi, deoarece f este continuă, obţinem prin trecere la limită în inegalitatea precedentă:

$$\lim_{n\to\infty} f(x) \le \lim_{n\to\infty} f(x + a_n) = f\left(\lim_{n\to\infty} (x + a_n)\right) = f(x + y - x) = f(y),$$

adică $f(x) \le f(y)$, deci f este crescătoare.

Observaţie. De precizat că rezultatul precedent rămâne valabil şi în ipoteza mai slabă *f este continuă la dreapta*, aşa cum se constată şi din demonstraţia expusă (în acest caz luăm şirul $(a_n)_{n\ge1}$ descrescător).

Putem încerca o întărire a rezultatului anterior prin slăbirea ipotezei:

Conjectură. *Dacă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este o funcţie care are proprietatea lui Darboux şi care verifică relaţia:*

$$f(x) \le f\left(x + \frac{1}{n}\right),$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}$ şi orice $n \in \mathbb{N}^*$, atunci f este crescătoare.

Încercarea de a demonstra acest rezultat se loveşte însă de faptul că relaţia nu ne permite să „controlăm" decât perechile de numere reale a căror diferenţă este număr raţional, iar proprietatea lui Darboux, spre deosebire de continuitate, nu ne permite să spunem nimic despre valorile funcţiei în puncte „vecine".

În fapt, conjectura este falsă, după cum ne arată următorul exemplu de funcţie reală care duce orice interval nedegenerat în întreaga mulţime a numerelor reale (o astfel de funcţie are proprietatea lui Darboux, deoarece duce orice interval într-un interval, dar nu este continuă în niciun punct $x_0 \in \mathbb{R}$, deoarece este nemărginită pe orice vecinătate a lui x_0).

Exemplul se bazează pe folosirea următoarele idei:

• dacă împărţim mulţimea numerelor reale în clase de echivalenţă prin relaţia de echivalenţă:

$$x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}, \qquad (E)$$

atunci fiecare clasă de echivalenţă este mulţime numărabilă;

• deoarece fiecare clasă de echivalenţă (mod E) este numărabilă, mulţimea A a acestor clase de echivalenţă are acelaşi cardinal ca mulţimea numerelor reale, deci există o funcţie bijectivă $\varphi : A \to \mathbb{R}$;

• funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dată de $f(x) = \varphi(C_x)$, unde C_x este clasa de echivalenţă a lui x (mod E), are proprietatea:

$$f\left(x + \frac{1}{n}\right) = f(x),\ \forall x \in \mathbb{R}$$

• fiecare interval nedegenerat conţine cel puţin un reprezentant al fiecărei clase (mod E), deoarece mulţimea numerelor raţionale este densă în mulţimea $\mathbb{R}$;

• deoarece φ este surjectivă, imaginea fiecărui interval nedegenerat prin funcţia f este întreaga mulţime a numerelor reale.

În spiritul enunţurilor şi demonstraţiilor anterioare se pot justifica şi următoarele.

Propoziţia 2. *Dacă $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este o funcţie continuă şi:*

$$f\left(x+\frac{1}{n}\right)=f\left(x\right)$$

pentru orice $x\in\mathbb{R}$ şi orice $n\in\mathbb{N}^*$, atunci funcţia f este constantă.

Ipoteza de continuitate nu poate fi substituită cu cea de existenţă a proprietăţii Darboux (a se vedea exemplul precedent).

Propoziţia 3. *Dacă $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este o funcţie continuă, $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este o funcţie monotonă şi $f(x)=g(x)$ pentru orice număr raţional x, atunci funcţiile f şi g sunt egale.*

Ipoteza de continuitate nu poate fi substituită cu cea de existenţă a proprietăţii Darboux: analog cu exemplul de mai înainte împărţim mulţimea $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ în clase de echivalenţă (mod E), considerăm o bijecţie $\psi:B\to\mathbb{R}$, unde B este mulţimea claselor de echivalenţă ale lui $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ (mod E) şi definim:

$$f(x)=\begin{cases} g(x)\,, \text{dacă } x\in\mathbb{Q} \\ \psi(C_x), \text{dacă } x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \end{cases},$$

unde C_x este clasa de echivalenţă a lui x (mod E). Funcţia f are proprietatea lui Darboux (acelaşi argument ca înainte), dar nu poate fi egală cu g, deoarece g are limite laterale finite în orice punct, pe când f nu poate avea discontinuităţi de prima speţă.

Bibliografie

[1] B.R. Gelbaum, J.M.H. Olmsted, *Contraexemple în analiză*, Editura Ştiinţifică, 1973.

[2] Gazeta Matematică, Seria B, anul 2010.