Soluţie. Fie $a \in G \setminus H$. Cum $\{e, a\} \subset C(a)$ şi $|C(a)| = 2$, rezultă că $C(a) = \{e, a\}$. Deoarece $a^2 \in C(a)$ şi $a^2 \neq a$, obţinem $a^2 = e$. Fie $a, b \in G \setminus H$. Dacă $a = b$, atunci $ab = a^2 = e \in H$. Dacă $a \neq b$ şi $a, b \in G \setminus H$, atunci $a^2b^2 = e = (ab)^2 = abab$, deci $ab = ba$. Rezultă că $b \in C(a) = \{e, a\}$, de unde $b = a$, fals. Deci $ab \in H$. În concluzie $ab \in H$, oricare ar fi $a, b \in G \setminus H$ şi funcţia $f : G \setminus H \to H$, $f(x) = ax$, cu $a \in G \setminus H$ fixat este bine definită şi injectivă. Rezultă $|G \setminus H| \leq |H|$, de unde $|G| \leq 2|H|$. Cum $H \neq G$, din teorema lui *Lagrange* obţinem $|G| = 2|H|$, deci G este finit. Dacă $2 \mid |H|$ există $h \in H \setminus \{e\}$ cu $h^2 = e$. Pentru $a \in G \setminus H$ avem $ah \in G \setminus H$ şi $a^2h^2 = e = (ah)^2 = ahah$. Rezultă că $ah = ha$, de unde $h \in \{e, a\}$, fals. Deci $|H| = 2n + 1$ şi $|G| = 4n + 2$.

26606. *Fie A un inel şi $a, b \in A$ cu proprietatea că $a^2 + b^2 = ab$. Să se arate că $(ab)^2 = b^2a^2$ şi $(ba)^2 = a^2b^2$.*

Marian Cucoaneş, Mărăşeşti

Soluţie. Din enunţ rezultă că $a\left(a^2 + b^2\right) = a^2b$ şi $\left(a^2 + b^2\right)b = ab^2$, deci $a^3 + ab^2 = a^2b$ şi $a^2b + b^3 = ab^2$. Prin adunarea celor două relaţii obţinem $a^3 + b^3 = 0$, (1). Cum $a^2\left(a^2 + b^2\right) = a^3b$, deci $a^4 + a^2b^2 = a^3b$, din (1) rezultă că $a^2b^2 = -a^4 - b^4$, (2). Deoarece $b\left(a^2 + b^2\right)a = baba$, obţinem $ba^3 + b^3a = (ba)^2$, iar din (1) rezultă $(ba)^2 = -a^4 - b^4$ şi din (2) avem $(ba)^2 = a^2b^2$.

Din $(ab)^2 = \left(a^2 + b^2\right)^2 = \left(a^2 + b^2\right)\left(a^2 + b^2\right) = a^4 + b^4 + a^2b^2 + b^2a^2$, din (2) obţinem $(ab)^2 = a^4 + b^4 - a^4 - b^4 + b^2a^2 = b^2a^2$.

PROBLEME PENTRU EXAMENE NAŢIONALE[1)]

Clasa a VII-a

1. Aflaţi rezultatul calculului $\left(2 - \dfrac{1}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{2}{3} - \dfrac{1}{6}\right)^2 - \left(1\dfrac{1}{3}\right)^2$.

2. Calculaţi media aritmetică a numerelor $\dfrac{7}{2}$; $1,25$; $0,5$.

3. Pentru $a = 5$ calculaţi $n = |2 - a| - |a - 7| + (-1)^{2012}$.

4. Într-o urnă sunt 15 bile albe şi 5 bile negre. Care este probabilitatea să se extragă o bilă neagră?

5. În triunghiul isoscel ABC, $m(\sphericalangle B) = 70^0$. Aflaţi măsura unghiului A.

6. Cinci unghiuri formate în jurul unui punct au măsurile exprimate prin numere naturale consecutive. Aflaţi măsura celui mai mare dintre ele.

Clasa a VIII-a

7. Aflaţi rezultatul calculului $\left(\dfrac{5}{3}\right)^{-3} \cdot 8\dfrac{1}{3} \cdot 5 - 0,4 \cdot (-5)^2$.

[1)] La problemele din această rubrică nu se primesc soluţii.

8. Ştiind că numărul $A = \left|5\sqrt{3} - 9\right| + \left|-2\sqrt{3}\right| + a$ este raţional, aflaţi valoarea lui a.

9. Dacă a şi b sunt numere reale astfel încât $a + b = 5\sqrt{2}$ şi $a \cdot b = 10$, calculaţi $a^2 + b^2$.

10. După o reducere cu 16%, un obiect costă 168 lei. Care a fost preţul iniţial?

11. Două cercuri cu razele de 12 cm, respectiv 5 cm se intersectează în A şi B. Distanţa dintre centrele lor, O_1 şi O_2, este de 13 cm. Aflaţi aria patrulaterului AO_1BO_2.

12. Aflaţi lungimea razei cercului circumscris unui triunghi echilateral cu aria egală cu $3\sqrt{3}$ cm^2.

Clasa a IX-a

13. Să se determine numărul de elemente ale mulţimii:

$$A = \left\{ (x, y) \,\middle|\, \sqrt{19 + 8\sqrt{3}} = x^2 + y^2\sqrt{3},\ x, y \in \mathbb{Q} \right\}.$$

14. Să se determine $m \in \mathbb{Z}$ astfel încât inecuaţia $|x| \leq 4 - m^2$ să aibă 7 soluţii numere întregi.

15. Să se determine mulţimea:

$$A = \left\{ f \mid f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f\left(x^2\right) f\left(x^4\right) = x,\ \forall x \in \mathbb{R} \right\}.$$

16. Să se determine primul termen şi raţia progresiei geometrice $(a_n)_{n\geq 1}$, dacă $a_1 a_3 = 9$ şi $a_2 a_4 = 81$.

17. Să se determine $x \in \mathbb{R}$ ştiind că $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = x \cdot \overrightarrow{AG}$, G fiind centrul de greutate al triunghiului ABC.

18. Dacă M este mijlocul laturii $[BC]$ a triunghiului ABC, să se determine $x \in \mathbb{R}$ astfel încât $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \left(x^2 + 2\right) \overrightarrow{AM}$.

Clasa a X-a

19. Să se arate că mulţimea $A = \{x \mid x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q},\ 2^x \in \mathbb{Q}\}$ este infinită.

20. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia $\log_2 x^2 = 2 \log_2 x$.

21. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia $2^x = 2^{-|x|}$.

22. Să se determine $n \in \mathbb{N},\ n \geq 2$, pentru care $\sqrt[n]{100} > 3$.

23. Să se determine $z \in \mathbb{C}$ dacă $|z| = \sqrt{2}$ şi $z + \bar{z} = 2$.

24. Să se determine $z \in \mathbb{C}$ dacă $z + |z| = \bar{z}$.

Clasa a XI-a

25. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -3 & 15 \end{pmatrix}$.

a) Demonstraţi că $A^3 = 2^8 A$.

b) Fie $X_a = I_2 + aA$, $a \in \mathbb{R}$. Demonstraţi că X_a este inversabilă dacă şi numai dacă $a \neq -\dfrac{1}{16}$.

c) Rezolvaţi în $M_2(\mathbb{R})$ ecuaţia $X^8 = A$.

26. Fie funcţia $f : (-\infty, -4) \cup (-4, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{3x+6}{x+4}$ şi şirul $(a_n)_{n \geq 0}$, dat de $a_0 = 0$ şi $a_{n+1} = f(a_n)$, $\forall\, n \geq 0$.

a) Arătaţi că f nu este strict crescătoare.

b) Arătaţi că şirul $(a_n)_{n \geq 0}$ este strict crescător.

c) Demonstraţi că şirul $(a_n)_{n \geq 0}$ este convergent şi determinaţi $\lim\limits_{n \to \infty} a_n$.

Clasa a XII-a

27. Fie mulţimea $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 7b & a \end{pmatrix} \,\middle|\, a, b \in \mathbb{Z} \right\}$.

a) Demonstraţi că $(M, \cdot)$ este monoid.

b) Fie $A \in M$ şi $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$. Arătaţi că, dacă $AX = XA$, atunci $X \in M$ sau există $\alpha \in \mathbb{Z}$ astfel încât $A = \alpha I_2$.

c) Demonstraţi că M are o infinitate de elemente inversabile.

28. Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}\,\mathrm{arctg} x, & x \in (-\infty, 0) \\ \sqrt{x}, & x \in [0, \infty). \end{cases}$

a) Demonstraţi că funcţia f nu admite primitive.

b) Demonstraţi că funcţia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^2 f(x)$ admite primitive pe $\mathbb{R}$.

c) Calculaţi $\displaystyle\int g(x)\,\mathrm{d}x$, $x \in \mathbb{R}$.

PROBLEME PENTRU CICLUL PRIMAR[1)]

P:508. Cu cât plăteşte mai mult o cantină care a achiziţionat 30 de căni şi 38 de farfurii decât alta, care a achiziţionat 42 de căni şi 28 de farfurii, de acelaşi fel, ştiind că dacă s-ar cumpăra 5 căni şi 7 farfurii s-ar plăti 117 lei şi dacă s-ar cumpăra 3 căni şi 5 farfurii s-ar plăti 79 lei?

Iuliana Drăgan, Bucureşti

[1)] Se primesc soluţii până la 28 februarie 2013 (data poştei). (N.R.)