LECȚIA 1

<u>Nota</u>: *Primul numar al acestei editii electronice este realizat in coordonarea domnilor profesori Ovidiu Sontea si Gabriel Vranceanu, inspectori de specialitate la Inspectoratul Municipiului Bucuresti*

Mulțimi şi elemente de logică - cls. a IX-a Mulțimi de numere - cls. a X-a Funcții definite pe mulțimea numerelor naturale (şir) - cls. a IX-a

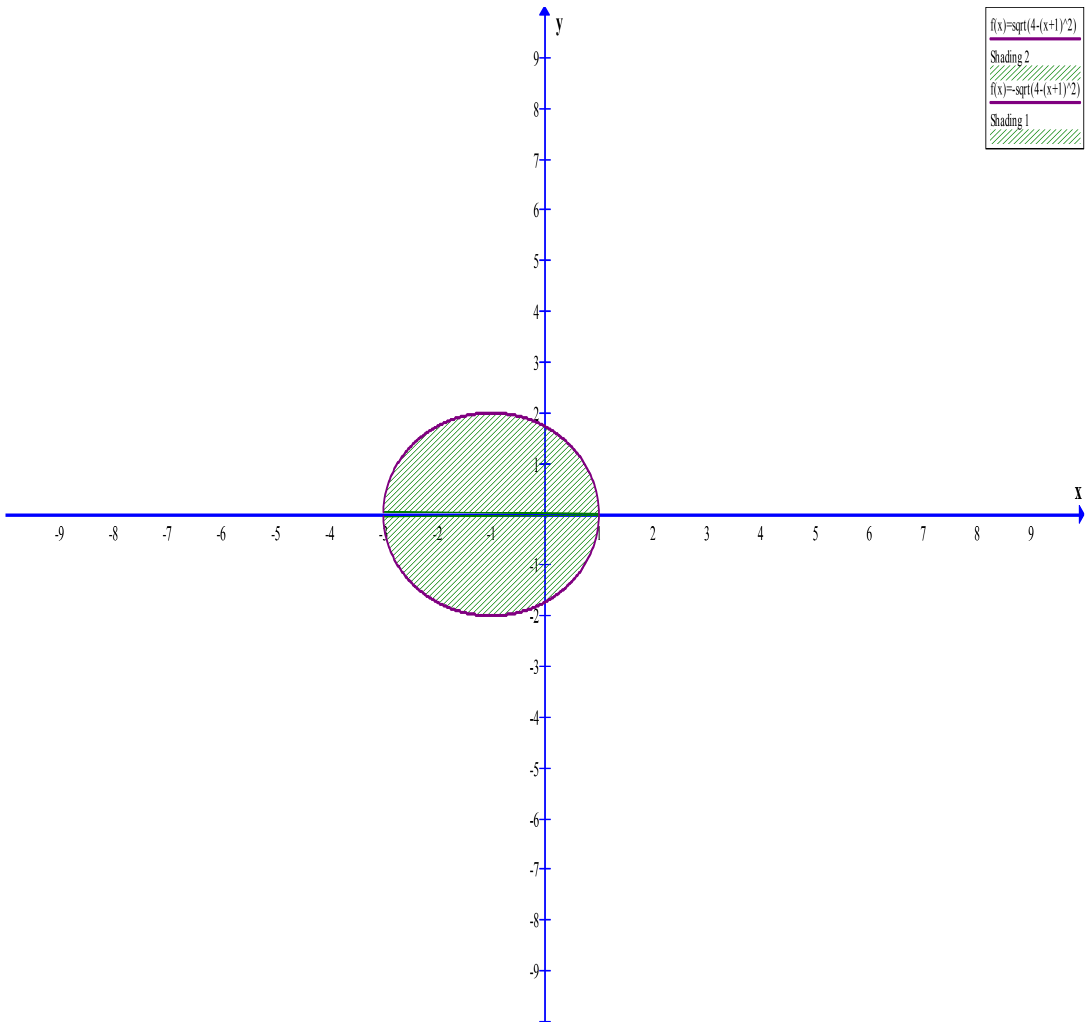
(MODEL SUBIECT 2012):

Determinați numărul de elemente corespunzătoare mulțimii $A=\{x\in\mathbb{Z} \mid |x+1|\leq 24\}$.

Rezolvare:
O condiție implicită, ce trebuie prelucrată: $|x+1|\leq 24$
şi o condiție explicită $x\in\mathbb{Z}$.
Prelucrarea condiției implicite presupune cunoştințe despre modulul unui număr, în cazul de față modulul unui număr real.
Conform definiției $|x|=\begin{cases} x, & x\geq 0 \\ -x, & x<0 \end{cases}$.
Definiția implică o serie de proprietăți, în cazul de față fiind utilă următoarea:
Fie $b\in\mathbb{R}$. Pentru orice $a\in\mathbb{R}, a\geq 0$, relația $|b|\leq a$ este echivalentă cu $-a\leq b\leq a$, adică $b\in[-a,a]$.
Prin aplicarea proprietății obținem:
$|x+1|\leq 24$, echivalent cu $-24\leq x+1\leq 24$, de unde transformând şirul de inegalități prin scăderea din fiecare membru a unei unități, rezultă $-25\leq x\leq 23$, deci $x\in[-25,23]$.
Cum $x\in\mathbb{Z}$, rezultă că din intervalul numerelor reale obținut convine condițiilor problemei doar numerele întregi, adică $x\in\mathbb{Z}\cap[-25,23]$.
Numărarea elementelor aflate la intersecție poate fi realizată prin gruparea pe perechi de numere $(a,-a)$: $(-1,1);(-2,2),...,(-23,23)$, deci avem 23 de perechi ce implică 46 de numere, la care se adaugă numerele care nu sunt în pereche: $0,-24$ şi -25.
În total sunt 49 de elemente.
În concluzie, cardinalul mulțimii A, notat uzual prin $cardA$ sau $|A|$ este egal cu 49.

Observații, întrebări şi variante:
Obținem răspunsuri diferite la cerințe similare precum:
$A=\{x\in\mathbb{N} \mid |x+1|\leq 24\}$?
$A=\{x\in\mathbb{Z} \mid |x+1|< 24\}$?
$A=\{x\in\mathbb{Q} \mid |x+1|\leq 24\}$?
$A=\{x\in\mathbb{R} \mid |x+1|\leq 24\}$?
$A=\{x\in\mathbb{Z} \mid |x+1|\geq 24\}$?
$A=\{x\in\mathbb{C} \mid |x+1|\leq 2\}$?

Corelând cu reprezentarea geometrică a numerelor, ce reprezentări geometrice se obțin în fiecare caz?
Următoarea mulțime de puncte geometrice corespunde vreuneia din mulțimile de soluții ale cerințelor anterioare?



Ce se modifică din punct de vedere al gradului de dificultate, păstrând cerința dar schimbând mulțimea: $A = \{x \in \mathbb{Z} \,||\, x + \sqrt{2} \,| \le 24\}$?

Aplicând aceeaşi schemă de raționament obținem de data aceasta că $A = [-24 - \sqrt{2}, 24 - \sqrt{2}] \cap \mathbb{Z}$.

Dificultatea suplimentară se datorează faptului că numerele ce reprezintă capetele intervalului închis sunt numere iraționale, deci este necesară o încadrare a acestora între întregi consecutivi, pornind de la o aproximare convenabilă, prin lipsă sau prin adaos astfel:

Se cunoaşte că $1 < \sqrt{2} < 2$, deci $-26 < -24 - \sqrt{2} < -25$ şi $22 < 24 - \sqrt{2} < 23$, deci, enumerând elementele mulțimii A, obținem $A = \{-25, -24, \dots -1, 0, 1, \dots, 22\}$.

În concluzie, $cardA = 48$ (25 de numere întregi negative, 22 de numere întregi strict pozitive şi numărul 0).

Referitor la calculul cu numere reale propunem

(SUBIECT 2011, IUNIE-IULIE)
Demonstrați că $\left(\sqrt{2},\sqrt{5}\right)\cap\mathbb{Z}=\{2\}$

Cum $2=\sqrt{4}$ şi $\sqrt{2}<\sqrt{4}<\sqrt{5}$ rezultă că afirmația este adevărată.
A verifica o relație de egalitate a două mulțimi presupune a demonstra o dublă incluziune, astfel:
$A=B$ dacă şi numai dacă $A\subseteq B$ şi $B\subseteq A$.
În raționamentul anterior a fost asigurată doar incluziunea $\{2\}\subseteq(\sqrt{2},\sqrt{5})\cap\mathbb{Z}$, însă nu a fost asigurată şi celalată incluziune.
Ce ar mai fi de completat?
Cum $1<\sqrt{2}<\sqrt{5}<3$, rezultă că 2 este singurul număr întreg ce aparține mulțimii $\left(\sqrt{2},\sqrt{5}\right)\cap\mathbb{Z}$.
Vom aborda în următoarea problemă:

(SUBIECT 2010):
Calculați $\log_6 3+\log_6 12$.

Rezolvare:
În clasa a X-a un capitol al algebrei a fost dedicat studiului expresiilor de tip logaritm şi a celor de tip exponențial.
Pentru înțelegerea logaritmilor este necesară o foarte bună cunoaştere a calculului cu puteri şi a proprietăților acestora.
În fapt avem echivalența:
Oricare ar fi $a,c\in\mathbb{R},a,c>0,a\neq 1$ avem $a^b=c$ echivalent cu $b=\log_a c$.
Cu alte cuvinte scrierea $\log_a c$ reprezintă puterea la care se ridică a pentru a obține valoarea c.
Plecând de la definiție se obține seria de proprietăți necesare calculului logaritmic:
În cazul de față, avem o sumă de logaritmi în aceeaşi bază pentru care se cunoaşte proprietatea:
$\log_a A+\log_a B=\log_a(A\cdot B)$, pentru orice $a>0,a\neq 1$ şi orice $A,B>0$.
Aplicând proprietatea se obține: $\log_6 3+\log_6 12=\log_6(3\cdot 12)=\log_6 36=2$.

Observații, întrebări şi variante:
Ce se schimbă în cazul $\log_6 12-\log_6 3$.
Pe o regulă mnemotehnică, dacă în formula anterioară la “plus” corespunde “înmulțire”, la “diferență” corespunde… “împărțire”:
$\log_a A-\log_a B=\log_a\frac{A}{B}$, pentru orice $a>0,a\neq 1$ şi orice $A,B>0$.
Evident, regula mnemotehnică, bazată pe asociații, nu ține loc de demonstrație.
Prin aplicare se obține: $\log_6 12-\log_6 3=\log_6\frac{12}{3}=\log_6 4$.

Cu siguranță că vă întrebați acum sau v-ați întrebat la începutul studiului logaritmilor ce semnificație are un rezultat de tipul $\log_6 4$.

Pentru cei care au înțeles definiția, este foarte clar acesta: prin $\log_6 4$ înțelegem numărul ce reprezintă puterea la care trebuie să-l ridicăm pe 6 pentru a avea ca rezultat numărul 4. Este la fel de clar ca şi $\sqrt{2}$.

Reamintim că un asftel de rezultat devine semnificativ spre exemplu pentru calculele inginereşti prin schimbarea bazei logaritmului, utilizând ca referință baza 10, caz în care logaritmul se notează $\lg$.

Formula schimbării de bază este:

$\log_a A = \dfrac{\log_b A}{\log_b a}$, pentru orice $a, b > 0, a \neq 1, b \neq 1$ şi orice $A > 0$.

Obținem astfel $\log_6 4 = \dfrac{\lg 4}{\lg 6}$, valori care se pot afla folosind un calculator științific, reprezentând aproximări foarte bune şi utile calculelor inginereşti.

O altă bază utilizată în matematică este baza asociată logaritmilor naturali, notată prin e cu o valoare aproximativă de 2,7182…în acest caz logaritmul are notația specifică $\ln$, notație cu care v-ați familiarizat în studiul analizei matematice.

Cerințe legate de calculul numeric pot fi şi de tipul:
→ stabilirea relației de egalitate dintre două expresii numerice;
→ stabilirea unei relații de ordine între două expresii numerice.

În acest ultim caz, propunem:
(SUBIECT 2010, AUGUST- SEPTEMBRIE – enunț modificat):
Care din numerele $2\sqrt[3]{6}$ şi $3\sqrt[3]{2}$ este mai mare?

Rezolvare:
O modalitate de abordare este cea de a utiliza operațiile de introduce/extragere a factorilor de sub semnul radical. În cazul de față vom avea:

$2\sqrt[3]{6} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 6} = \sqrt[3]{48}$ iar $3\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{3^3 \cdot 2} = \sqrt[3]{54}$.

Cum $48 < 54$ şi funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \sqrt[3]{x}$ este strict crescătoare, rezultă că $f(48) < f(54)$, deci $2\sqrt[3]{6} < 3\sqrt[3]{2}$. Numărul mai mare este $3\sqrt[3]{2}$.

Observații, întrebări şi variante:
În cazul anterior am avut de comparat expresii care implicau radicali de acelaşi ordin; însă pot fi cerințe care să implice compararea sau operarea cu radicali de ordine diferite; în acest caz, se poate utiliza proprietatea de schimbare a ordinului unui radical astfel:

$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{km}{kn}} = \sqrt[kn]{a^{km}}$ (în anumite condiții de bună definire).

Propunem următorul exercițiu:
Ordonați crescător expresiile numerice:
$\sqrt{2}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[4]{4}$ şi $\sqrt[6]{6}$

Ordinele radicalilor sunt 2,3 4 şi 6 iar din formula anterioară se observă că a aduce la acelaşi ordin mai mulți radicali implică determinarea celui mai mic multiplu comun al ordinelor.

Pentru optimizarea rezolvării putem remarca faptul că $\sqrt[4]{4}=\sqrt[4]{2^2}=2^{\frac{2}{4}}=2^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$.
Cel mai mic multiplu comun al numerelor 2,3 şi 6 este chiar 6, deci
$\sqrt{2}=\sqrt[6]{2^3}=\sqrt[6]{8}, \sqrt[3]{3}=\sqrt[6]{3^2}=\sqrt[6]{9}, \sqrt[4]{4}=\sqrt{2}=\sqrt[6]{8}$ de unde, ţinând cont de stricta monotonie a funcţiei radical de ordin 6 rezultă ordonarea:
$\sqrt[6]{6}<\sqrt{2}\le\sqrt[4]{4}<\sqrt[3]{3}$.
Introducerea şi extragerea factorilor de sub radical trebuie realizate prin raportare la buna definire a radicalilor.
Spre exemplificare: $\sqrt{(\underbrace{1-\sqrt{2}}_{\le 0})^2(3-2\sqrt{2})}=\left|1-\sqrt{2}\right|\cdot\sqrt{3-2\sqrt{2}}=(\sqrt{2}-1)\cdot\sqrt{3-2\sqrt{2}}$.

În acest exemplu a apărut şi expresia $\sqrt{3-2\sqrt{2}}$, care sub formă generală este $\sqrt{a\pm\sqrt{b}}$ denumită uzual radical compus şi care în anumite condiţii poate fi rescrisă mai simplu, pornind de la aplicarea unei formule de calcul prescurtat:
$a^2\pm 2ab+b^2=(a\pm b)^2$, de unde
$3-2\sqrt{2}=2-2\sqrt{2}+1=\left(\sqrt{2}\right)^2-2\cdot\sqrt{2}\cdot 1+1^2=\left(\sqrt{2}-1\right)^2$, deci
$\sqrt{3-2\sqrt{2}}=\sqrt{\left(\sqrt{2}-1\right)^2}=\left|\underbrace{\sqrt{2}-1}_{>0}\right|=\sqrt{2}-1$.
Prin prelucrarea expresiei se obţine în final

$$\sqrt{(\underbrace{1-\sqrt{2}}_{\le 0})^2(3-2\sqrt{2})}=(\sqrt{2}-1)^2=3-2\sqrt{2}.$$

(MODEL SUBIECT 2011):
Calculaţi modulul numărului complex $z=1-i\sqrt{3}$.

Rezolvare:
Pentru a rezolva cerinţa, să ne reamintim câteva elemente caracteristice în raport cu numerele complexe.
Astfel, un număr complex admite două tipuri de scriere;
→ scriere sub formă algebrică: $z=a+ib$, unde $a,b\in\mathbb{R}$ iar prin i se notează unitatea imaginară, adică un număr complex care are proprietatea că pătratul său este egal cu -1 ($i^2=-1$);
→ scriere sub formă trigonometrică : $z=r\cdot(\cos t+i\sin t)$, unde $r>0$, t$\in\mathbb{R}$
Cele două scrieri sunt echivalente existând următoarele relaţii de legătură:

$r=\sqrt{a^2+b^2}$ şi $\begin{cases}\cos t=\dfrac{a}{r}\\ \sin t=\dfrac{b}{r}\end{cases}$ (pentru cazul în care $z\ne 0$).

Indiferent de scrierea utilizată, numărul complex este obținut din adiția a două părți. În cazul general $z = a + ib$ avem:

→ partea reală: $\mathrm{Re}(z) = a$;

→ partea imaginară: $\mathrm{Im}(z) = b$.

Putem spune că pentru orice pereche ordonată de numere reale (a, b) există un unic număr complex $z = a + ib$ şi reciproc. Cum oricărei perechi ordonate de numere reale (a, b) îi corespunde un unic punct dintr-un plan în care am fixat un reper cartezian xOy şi reciproc, rezultă că putem reprezenta orice număr complex ca punct dintr-un plan, caz în care putem da ca interpretare geometrică a expresiei algebrice $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ aceea de lungime a segmentului determinat de originea sistemului de axe (în notații uzuale *O*) şi punctul geometric corespunzător numărului complex $z = a + ib$, notat generic M. Asociem următoarea scriere: $M(z)$ şi înțelegem punctul M de afix z, de coordonate (a, b), $M(a, b)$.

În aceste considerații, prin notația $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ vom înțelege modulul numărului complex $z = a + ib$.

În cazul de față, cum $z = 1 - i\sqrt{3} = 1 + i \cdot (-\sqrt{3})$, rezultă că $a = 1, b = -\sqrt{3}$, deci $|z| = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = 2$.

Ca interpretare geometrică avem că punctul de afix $z = 1 - i\sqrt{3}$ este situat la distanța 2 față de originea sistemului de axe.

Observații, întrebări şi variante:

Numărul $z = 1 - i\sqrt{3}$ este singurul număr complex de modul 2?

Ce reprezentare geometrică generează toate numerele complexe de modul 2?

Dar toate numerele complexe de modul mai mic sau egal cu 2?

Cum putem calcula cât mai simplu modulul numărului complex $(1 - i\sqrt{3})^{2012}$?

Trebuie să cunoaştem şi alte proprietăți ale modulului unui număr complex. În acest caz, utilă este proprietatea următoare:

Oricare ar fi $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$,

Proprietate din care derivă şi:

$|z^n| = |z|^n$, oricare $z \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}^*$.

În concluzie, $|(1 - i\sqrt{3})^{2012}| = |1 - i\sqrt{3}|^{2012} = 2^{2012}$.

Să ne reamintim formula de calcul prescurtat $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$.

Un atu important în rezolvarea de probleme este acela să cunoaştem conexiuni între diferite părți ale matematicii.

Astfel, în cazul în care considerăm a, b numere reale pozitive, putem să dăm o interpretare geomentrică acestei identități algebrice, de exemplu ca o exprimare a ariei unui dreptunghi ca diferența ariilor a două pătrate.

O altă interpretare este legată de noțiunile de algebră de clasa a XI-a, mai precis calculul determinanților de ordinul al doilea:

$\begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix} = a^2 - b^2$.

Scopul reamintirii formulei de calcul prescurtat este pentru a facilita următorul calcul: $(1-i\sqrt{3})(1+i\sqrt{3}) = 1^2 - \left[i\sqrt{3}\right]^2 = 1-3i^2 = 1+3 = 4$, sau, pe caz general: $(a+ib)(a-ib) = a^2 - b^2$.

În cazul în care notăm $z = a+ib$, numărul complex $a-ib$ se numeşte conjugatul lui z şi se notează prin $\bar{z}$. Numerele z şi $\bar{z}$ se numesc numere complex conjugate şi punctele geometrice ale căror afixe sunt simetric dispuse față de axa Ox.

Obținem şi proprietățile utile în anumite exerciții:

a) $|z| = |\bar{z}|$ b) $z \cdot \bar{z} = |z|^2$ c) $z = \bar{z}$ dacă şi numai dacă $\operatorname{Im} z = 0$

Ca exemplificare a utilității proprietății b) vă propun următorul exercițiu:

Rezolvați ecuația $z^2 = \bar{z}$.

Ținând cont că dacă două numere compexe sunt egale, atunci modulele lor sunt egale, din ecuația dată rezultă $\left|z^2\right| = |\bar{z}|$, de unde $|z|^2 = |z|$, deci soluțiile ecuației inițiale trebuie să aibă modulul egal cu 0 sau cu 1.

În cazul $|z| = 0$, cum singurul număr complex de modul 0 este numărul 0, prin verificare directă obținem o primă soluție $z_1 = 0$.

În cazul $|z| = 1$, rezultă că $z \neq 0$ şi din proprietatea b) rezultă că $\bar{z} = \frac{1}{z}$. În aceste condiții, ecuația inițială devine:

$z^3 = 1$, echivalent cu $z^3 - 1 = 0$, de unde, utilizând formula de calcul prescurtat $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$, prin particularizare se obține ecuația echivalentă $(z-1)(z^2+z+1) = 0$, cu cazurile:

$z - 1 = 0$, deci o nouă soluție este $z_2 = 1$;

$z^2 + z + 1 = 0$, de unde aplicând formulele de rezolvare a ecuației de gradul al doilea se obține:

$\Delta = 1 - 4 = -3 = 3i^2$, deci $z_{3,4} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$.

Reamintim la acest moment că ecuația de gradul al doilea se putea situa în următoarele contexte:

→ ecuație cu coeficienți reali, cu $\Delta > 0$, caz în care se admit două soluții reale şi distincte;

→ ecuație cu coeficienți reali, cu $\Delta = 0$, caz în care se admit două soluții reale şi egale (rădăcină dublă);

→ ecuație cu coeficienți reali, cu $\Delta < 0$, caz în care se admit două soluții complex conjugate;

→ ecuație cu coeficienți complecşi, caz în care se admit două soluții complexe.

Cum toate se leagă, apariția ecuației $z^3 = 1$ aduce în discuție tipuri de ecuații, în acest caz, clasa de ecuații din care face parte fiind ecuațiile binome, cazul general $z^n = \alpha$, unde $n \in \mathbb{N}, \alpha \in \mathbb{C}$, cu o exprimare a soluțiilor prin utilizarea formei trigonometrice şi a formulei lui Moivre:

$(\cos t + i\sin t)^n = \cos nt + i\sin nt$, oricare $t \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$.

O aplicație la această formulă, presupunând şi cunoştințe bune pe partea de trigonometrie este:

Calculați $(1 - i\sqrt{3})^{2012}$.

Dacă determinarea modulului acestui număr complex a fost facilă, calculul efectiv al acestei puteri presupune să intuim existența "ascunsă" a unor valori trigonometrice principale:

$$1 - i\sqrt{3} = 2 \cdot \left(\frac{1}{2} - i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2 \cdot \left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right).$$

Putem aplica acum formula lui Moivre:

$$\left(1 - i\sqrt{3}\right)^{2012} = 2^{2012} \cdot \left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)^{2012} = 2^{2012} \cdot \left(\cos\left(-\frac{2012\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{2012\pi}{3}\right)\right) =$$

$$= 2^{2012} \cdot \left(\cos\frac{2012\pi}{3} - i\sin\frac{2012\pi}{3}\right)$$

unde am ținut cont de proprietățile fundamentale ale funcțiilor trigonometrice, mai precis că funcția cosinue ste funcție pară iar funcția sinus este funcție impară:

$\cos(-x) = \cos x$, oricare $x \in \mathbb{R}$ (pară)

$\sin(-x) = -\sin x$, oricare $x \in \mathbb{R}$ (impară)

Utilizând cercul trigonometric, cum $\frac{2012\pi}{3} = 670\pi + \frac{2\pi}{3}$, obținem:

$$\cos\frac{2012\pi}{3} = \cos\left(670\pi + \frac{2\pi}{3}\right) \overset{periodicitate}{=} \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$$

$$\sin\frac{2012\pi}{3} = \sin\left(670\pi + \frac{2\pi}{3}\right) \overset{periodicitate}{=} \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

În concluzie $\left(1 - i\sqrt{3}\right)^{2012} = 2^{2012} \cdot \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2^{2011} \cdot (-1 + i\sqrt{3})$.

Vom porni de la o cerință similară dar abordată pe o particularitate care permite obținerea mai facilă a răspunsului decât apelând la elementele de trigonometrie.

Să calculăm $(1+i)^{2012}$.

Care este motivul pentru care ridicarea la putere a unei paranteze este mai dificilă decât ridicarea unui termen la o putere?

Cum putem în unele cazuri prefigura un rezultat? Prin particularizări, din aproape în aproape etc.

Vom efectua următoarul calcul :

$(1+i)^2 = 1 + 2i + i^2 = 2i$.

Este necesar trecerea la calculul $(1+i)^3$ sau rezultatul anterior este util problemei ?

Evident, putem rescrie puterea astfel :

$(1+i)^{2012} = \left[(1+i)^2\right]^{1006} = (2i)^{1006} = 2^{1006} \cdot i^{1006}$.

Am translatat greutatea problemei în calculul puterilor unității imaginare i, despre care ne aducem aminte că $i^2 = -1$, de unde $i^4 = 1$, deci

$i^{1006} = \left(i^4\right)^{251} \cdot i^2 = 1 \cdot (-1) = -1$.

In concluzie $(1+i)^{2012} = -2^{1006}$.

Aducerea în discuție a puterilor lui i permite abordarea unei alte serii de probleme legate de sume/produse ale acestor puteri.

Un exemplu imediat este:

Calculați suma:

$S = 1 + i + i^2 + \ldots + i^{2012}$.

Cum $i^4 = 1$, puterile de exponenți numere naturale consecutive ale lui i se repetă din 4 în 4 şi, mai mult suma oricăror patru puteri de exponeți numere naturale consecutive ale lui i are ca rezultat 0.

Cum numărul de termeni ai sumei S este egal cu 2013, putem împărți termenii sumei, cu excepția primului, în grupe de câte 4 puteri consecutive, fiecare grupă având la sumarea termenilor rezultatul 0.

În concluzie: $S = 1 + \underbrace{\underbrace{(i + i^2 + i^3 + i^4)}_{=0} + \ldots + \underbrace{(i^{2009} + i^{2010} + i^{2011} + i^{2012})}_{=0}}_{503 \text{ grupe}}$.

Un alt exercițiu:

Calculați suma $S = i^1 + i^{11} + i^{111} + \ldots + i^{\overbrace{111\ldots1}^{de\ 2012\ ori}}$.

Pentru a rezolva problema trebuie să determinăm o regulă din care să obținem ce resturi se obțin la împărțirea numerelor de forma 1111...1 la 4. Cum orice astfel de număr care are cel puțin 3 cifre se poate scrie sub forma:

$\underbrace{1\ldots1111}_{n, n\geq 3} = \underbrace{1\ldots1}_{n-2}00 + 11 = \underbrace{1\ldots1}_{n-2} \cdot 100 + 11$, deorece primul termen al sumei este divizibil cu 4, restul numărului inițial la împărțirea prin 4 este egal cu restul împărțirii lui 11 la 4, adică egal cu 3.

În aceste condiții, rezultă că $i^{\underbrace{1\ldots1111}_{n,n\geq 3}} = i^{11} = i^3 = -i$, de unde

$S = i^1 + i^{11} + i^{111} + \ldots + i^{\overbrace{111\ldots1}^{de\ 2012\ ori}} = i + \underbrace{(-i) + (-i) + \ldots + (-i)}_{2011} = -2010i$.

Rămâne să dați voi răspunsul la următoarea problemă:

Să se determine valorile cifrei a pentru care suma $S = i^a + i^{\overline{aa}} + i^{\overline{aaa}} + \ldots + i^{\overbrace{aa\ldots a}^{de\ 2012\ ori}} \in \mathbb{R}$.

Vom avea în vedere în continuare câteva exerciții în care vom folosi noțiunea de progresie.

PROGRESII ARITMETICE	PROGRESII GEOMETRICE
PROPRIETĂȚI	
$r = a_{n+1} - a_n$	$q = \dfrac{b_{n+1}}{b_n}$,primul termen este nenul
$a_p - a_q = (p-q)r$	$\dfrac{b_m}{b_n} = q^{m-n}$

$a_{n+1}=\frac{a_n+a_{n+2}}{2}$ (trei termeni consecutivi ai unei p.a. au proprietatea că cel din mijloc este media aritmetică a celorlalți 2)	$b_{n+1}^2=b_n\cdot b_{n+2}$ (trei termeni consecutivi ai unei p.g. au proprietatea că cel din mijloc este medie proporțională a celorlalți 2)
Dacă avem $a_1,a_2,...,a_n$ termeni consecutivi într-o p.a., atunci $a_1+a_n=a_2+a_{n-1}=...=a_k+a_{n-k}$	Dacă avem $b_1,b_2,...,b_n$ termeni consecutivi într-o p.a., atunci $b_1\cdot b_n=b_2\cdot b_{n-1}=...=b_k\cdot b_{n-k}$
SUMA PRIMILOR n TERMENI (notată prin S_n)	
$S_n=a_1+a_2+...+a_n=\frac{(a_1+a_n)\cdot n}{2}$	$S_n=b_1+b_2+...+b_n=b_1\cdot\frac{q^n-1}{q-1}$, dacă $q\neq 1$ Sau $S_n=b_1+b_2+...+b_n=nb_1$, dacă $q=1$

Să se determine numărul natural n din egalitatea 1+ 5 + 9 + ...+ n = 231, unde termenii sumei sunt termenii consecutivi ai unei progresii aritmetice.

Considerând progresia aritmetică în notația sa generală $(a_t)_{t\geq 1}$, astfel încât $a_1=1$ şi de rație $r=5-1=4$.
Ceea ce nu se cunoaşte este numărul de termeni ai sumei, pe care îl notăm cu $k, k\in\mathbb{N}^*$.
În aceste notații, membrul stâng reprezintă suma primilor k termeni ai progresiei aritmetice $(a_t)_{t\geq 1}$, pentru care avem formula: $S_k=a_1+a_2+...+a_k=\frac{(a_1+a_k)\cdot k}{2}=231$.
Pe de altă parte $n=a_k=a_1+(k-1)r=1+4(k-1)=4k-3$ şi $a_1+a_k=4k-2=2(2k-1)$.
Obținem $k(2k-1)=231$, deci $2k^2-k-231=0$ cu soluțiile $k_1=11\in\mathbb{N}^*$, respectiv $k_2=-\frac{21}{2}\notin\mathbb{N}^*$, deci convine doar valoarea 11.
Efectuăm şi calculul lui n, $n=4k-3=41$.

Să se determine $a,b\in\mathbb{R}$, ştiind că numerele 2, a, b sunt în termeni consecutivi ai unei progresii geometrice şi 2, 17, a sunt în termenii consecutivi ai unei progresii aritmetice.

Obținem sistemul de ecuații: $\begin{cases} a^2=2b \\ \frac{2+a}{2}=17 \end{cases}$, $a,b\in\mathbb{R}$.
Din a doua ecuație obținem $a=32$, iar din prima $2b=1024$, deci $b=512$.

Să se calculeze suma primilor 20 de termeni ai progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, $n\in\mathbb{N}$, ştiind că $a_4-a_2=4$ şi
$a_1+a_3+a_5+a_6=30$.

În sistemul $\begin{cases} a_4 - a_2 = 4 \\ a_1 + a_3 + a_5 + a_6 = 30 \end{cases}$ exprimăm toți termenii în raport cu a_1 şi rația ($a_2 = a_1 + r$, $a_3 = a_1 + 2r$, $a_4 = a_1 + 3r$, $a_5 = a_1 + 4r$, $a_6 = a_1 + 5r$), deci sistemul se rescrie: $\begin{cases} 2r = 4 \\ 4a_1 + 11r = 30 \end{cases}$, deci $r = 2$ şi $a_1 = 2$.

Aplicând formula pentru sumarea primilor 20 de termeni ai unei progresii aritmetice şi ținând cont că $a_{20} = a_1 + 19r = 2 + 19 \cdot 2 = 40$, obținem: $S_{20} = a_1 + a_2 + ... + a_{20} = \frac{(a_1 + a_{20}) \cdot 20}{2} = \frac{(2+40) \cdot 20}{2} = 420$.

Se consideră numărul real $s = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + ... + \frac{1}{2^{2008}}$. *Să se demonstreze că* $s \in (1;2)$.

Recunoaştem că termenii sumei s sunt primii 2009 termeni ai progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$, de prim termen $b_1 = 1$ şi rație $q = \frac{1}{2}$. Realizând identificările corespunzătoare în formula $S_n = b_1 + b_2 + ... + b_n = b_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$ ($n = 2009$), rezultă $s_{2009} = 1 \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{2009} - 1}{\frac{1}{2} - 1} = -2 \cdot \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{2009} - 1\right] = 2 \cdot \left[\underbrace{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2009}}_{\in(0,1)}\right] \in (0,2)$. Pe de altă parte, evident $s = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + ... + \frac{1}{2^{2008}} > 1 + \frac{1}{2} > 1$, deci $s_{2009} \in (1,2)$.

Pentru exersarea celor expuse mai sus propunem câteva probleme.

1. Raționalizați numitorul fracției $\frac{1}{1 - \sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{6}}$.
2. Determinați partea reală a numărului complex $\left(\sqrt{3} + i\right)^6$.
3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $|2x - 1| - 2|1 - 2x| = -3$.
4. Determinați numerele prime cu proprietatea că media aritmetică a divizorilor naturali nu este număr natural.
5. Determinați două intervale A, B de numere reale, a căror diferență să fie o mulțime formată exact din două elemente cu suma 1.
6. Considerăm mulțimea $A = \{x \in \mathbf{Z} \mid x \in (-2010, 2010]\}$.Să se calculeze produsul tuturor elementelor mulțimii A.
7. Calculați suma $S(2010) = \sum_{k=1}^{2010} (-1)^k \cdot k$.

8. Determinați partea fracționară a numărului $\frac{1}{\left[1-\sqrt{2}\right]}$.
9. Demonstrați că $S=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+...+\frac{1}{2010}\notin\mathbb{N}$
10. Ordonați crescător numerele : $12,\sqrt{141},\sqrt{146},3\sqrt{14},2\sqrt{31}$.
11. Dacă $z^2 + z + 1 = 0$, să se afle $z^{2005}+\frac{1}{z^{2005}}$.
12. Calculați $\left[(1-i)(i-1)\right]^4$.
13. Fie numerele complexe $z_1=-2-i$ și. $z_2=\frac{1+3i}{1-i}$. Să se calculeze: $z_1\cdot z_2$; $\frac{1}{z_1}$.
14. Să se demonstreze că $(1+i\sqrt{3})^3$ reprezintă un număr întreg.
15. Dați exemplu de şir care este în acelaşi timp şi progresie aritmetică, şi progresie geometrică.
16. Argumentați dacă şirul 1,1,2,3,5,8,13,... este progresie aritmetică. Dar geometrică?
17. Scrieți primii 8 termeni ai p.a. dacă al 3-lea termen este 10 şi rația este 3
18. Scrieți primii 5 termeni ai p.g. dacă primul termen este egal cu 2 şi rația -2.
19. Şirul de formulă $a_n=3n-5$, $n\geq 1$ este progresie aritmetică? Argumentați.
20. Determinați rația p.a. ştiind că $a_7-a_4=54$.
21. Să se calculeze S_{2009} pentru p.a. de prim termen $a_1=1$ şi rație $r=3$.
22. Dați exemplu de progresie aritmetică pentru care $S_{2009}=0$.
23. Ce reprezintă pentru p.a. diferența $S_{2009}-S_{2008}$? Ce puteți spune despre progresia $S_{2009}-S_{2008}=S_{2008}-S_{2007}$