După cum am înţeles, aceasta presupune o muncă uriaşă îndeosebi în selectarea celor mai talentaţi elevi ... construind cu mare har viitorul matematicii româneşti. Ca fire este retras, nu comunică aşa ... doar de dragul conversaţiei, ci are acea dăruire totală, neprecupeţind nimic pentru a veni în ajutorul acelora ce vor fi matematicienii noştri de mâine".

În 1999 a fost preşedintele Juriului Internaţional al Olimpiadei Internaţionale de Matematică de la Bucureşti.

Cei ce îl cunosc pot depune mărturie că faţă de valoarea sa ştiinţifică este prea puţin cunoscut, şi aceasta în mare măsură datorită modestiei sale, nedorind să fie evidenţiat sau să deranjeze, ci dorind să acorde tuturor celor din jurul său, cu delicateţe şi un zâmbet binevoitor, respectul cuvenit.

Ioan Tomescu, modest şi demn, a urcat toată ierarhia universitară, de la asistent, în 1965, la profesor universitar, în 1990, fiind un model de savant, de mare valoare morală pentru toţi iubitorii şi pasionaţii de matematică.

Bibliografie

[1] Ion Grigore, *Memorii*, Editura Milenium, Ploieşti, 2007.

[2] D. Nistor Teodosiu, *Poveste la Institutul de Matematică*, Editura Curtea Veche, Bucuresti, 2008.

ARTICOLE ŞI NOTE MATEMATICE

GENERALIZAREA INEGALITĂŢII DIN PROBLEMA 26543 DIN G.M.-B

Romelia Şcheau[1] şi Constantin Şcheau[2]

Abstract. The article presents a generalization of the inequality featured in the quoted problem.

Keywords: elementary inequalities.

MSC : 26D05

În această lucrare vom da o generalizare a inegalităţii din problema 26543, publicată în G.M.-B nr. 12/2011 şi vom obţine inegalităţi cunoscute şi inegalităţi noi din această generalizare.

Problema 26543 cerea următoarele: *Dacă* $a > 0,\ b > 0,\ c > 0$ *verifică*

$$\frac{a}{2a+b+c} + \frac{b}{a+2b+c} + \frac{c}{a+b+2c} \geq \frac{3}{4},$$

să se arate că $a = b = c$.

1) Profesor, Colegiul Naţional „Al. I. Cuza", Ploieşti

2) Profesor, Colegiul Naţional „Mihai Viteazul", Ploieşti

Rezultatul se obţine arătând că, în condiţiile din ipoteză, avem:

$$\frac{a}{2a+b+c}+\frac{b}{a+2b+c}+\frac{c}{a+b+2c}\leq\frac{3}{4} \tag{$*$}$$

şi că egalitatea se realizează doar în cazul $a=b=c$.

Vom generaliza inegalitatea $(*)$ la n termeni.

Teoremă. *Fie $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$, $a_1,a_2,\ldots,a_n>0$, $k\in\mathbb{N}$, $1\leq k<n$ şi $l_1,l_2\in\mathbb{R}$, $l_1\leq l_2$, $l_2>0$. Are loc inegalitatea:*

$$\sum_{i=0}^{n-1}\frac{a_{i+1}+a_{i+2}+\ldots+a_{i+k}}{l_1(a_{i+1}+a_{i+2}+\ldots+a_{i+k})+l_2(a_{i+k+1}+a_{i+k+2}+\ldots+a_{i+n})}\geq$$

$$\geq\frac{nk}{kl_1+(n-k)l_2}, \tag{$**$}$$

unde indicii din sumă sunt luaţi modulo n şi numitorii fracţiilor din membrul stâng al inegalităţii au valori strict pozitive.

Demonstraţie. 1. Dacă $l_1=l_2$ atunci inegalitatea devine egalitate.

2. Dacă $l_1<l_2$, se înmulţeşte inegalitatea cu l_2-l_1 şi se adună n în fiecare membru al inegalităţii:

$$\sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{(l_2-l_1)(a_{i+1}+a_{i+2}+\ldots+a_{i+k})}{l_1(a_{i+1}+a_{i+2}+\ldots+a_{i+k})+l_2(a_{i+k+1}+a_{i+k+2}+\ldots+a_{i+n})}+1\right)\geq$$

$$\geq\frac{nk(l_2-l_1)}{kl_1+(n-k)l_2}+n.$$

Aceasta este echivalent cu:

$$(a_1+a_2+\ldots+a_n)\left(\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{l_1(a_{i+1}+\ldots+a_{i+k})+l_2(a_{i+k+1}+\ldots+a_{i+n})}\right)\geq$$

$$\geq\frac{n^2}{kl_1+(n-k)l_2},$$

sau:

$$\frac{(kl_1+(n-k)l_2)(a_1+\ldots+a_n)}{n}\geq$$

$$\geq\frac{n}{\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{l_1(a_{i+1}+\ldots+a_{i+k})+l_2(a_{i+k+1}+\ldots+a_{i+n})}},$$

care este chiar inegalitatea dintre media aritmetică şi cea armonică a numerelor $l_1(a_{i+1}+\ldots+a_{i+k})+l_2(a_{i+k+1}+\ldots+a_{i+n})$, $i\in\overline{0,n-1}$.

Observaţii. 1) Dacă $l_2<l_1$ inegalitatea din teoremă are sens opus.

2) Pentru $l_1=2$, $l_2=1$, $k=1$, $n=3$, $a_1=a$, $a_2=b$, $a_3=c$ se obţine inegalitatea $(*)$.

Aplicaţii

1. (Inegalitatea lui *Nesbitt*) *Dacă* $a, b, c > 0$, *atunci*:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

Luăm în $(**)$ $a_1 = a, a_2 = b, a_3 = c, k = 1, n = 3, l_1 = 0, l_2 = 1$.

2. (D. S. Mitrinovici) *Dacă* $a_1, a_2, \ldots, a_n > 0$, *şi* $1 \leq k < n$, *atunci*:

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_k}{a_{k+1} + a_{k+2} + \ldots + a_n} + \frac{a_2 + a_3 + \ldots + a_{k+1}}{a_{k+2} + a_{k+3} + \ldots + a_1} + \ldots + \frac{a_n + a_1 + \ldots + a_{k-1}}{a_k + a_{k+1} + \ldots + a_{n-1}} \geq \frac{nk}{n-k}.$$

Particularizăm în $(**)$ $l_1 = 0$, $l_2 = 1$.

3. (Problema 26623 G.M.-B nr. 6-7-8, 2012, *C. Moanţă*) *Fie* a, b, c, d *lungimile laturilor unui patrulater convex. Notăm cu* p *semiperimetrul acestuia. Să se demonstreze că*:

$$\frac{a}{p+b+c+d} + \frac{b}{p+a+c+d} + \frac{c}{p+a+b+d} + \frac{d}{p+a+b+c} \geq \frac{4}{5}.$$

Înlocuind semiperimetrul în funcţie de laturi se obţine inegalitatea:

$$\frac{a}{a+3(b+c+d)} + \frac{b}{b+3(a+c+d)} + \frac{c}{c+3(a+b+d)} + \frac{d}{d+3(a+b+c)} \geq \frac{2}{5},$$

care rezultă din $(**)$ luând $a_1 = a$, $a_2 = b$, $a_3 = c$, $a_4 = d$, $k = 1, n = 4$, $l_1 = 1$, $l_2 = 3$.

4. *Dacă* a, b, c *sunt laturile unui triunghi atunci*:

$$\frac{a}{b+c-a} + \frac{b}{c+a-b} + \frac{c}{a+b-c} \geq 3.$$

Luăm în $(**)$ $a_1 = a$, $a_2 = b$, $a_3 = c$, $k = 1$, $n = 3$, $l_1 = -1$, $l_2 = 1$.

5. *Dacă* a, b, c, d *sunt laturile unui patrulater, atunci:*:

$$\frac{a}{b+c+d-a} + \frac{b}{c+d+a-b} + \frac{c}{d+a+b-c} + \frac{d}{a+b+c-d} \geq 2.$$

Luăm în $(**)$ $a_1 = a$, $a_2 = b$, $a_3 = c$, $a_4 = d$, $k = 1$, $n = 4$, $l_1 = -1$, $l_2 = 1$.

La fel se pot demonstra inegalităţile:

6. *Dacă* a, b, c, $d > 0$ *atunci*:

$$\frac{a+b}{3(a+b)+2(c+d)} + \frac{b+c}{3(b+c)+2(d+a)} + \frac{c+d}{3(c+d)+2(a+b)} + \frac{d+a}{3(d+a)+2(b+c)} \leq \frac{4}{5}.$$

7. *Dacă* $a, b, c, d > 0$ *atunci*:

$$\frac{a}{2a+3(b+c+d)}+\frac{b}{2b+3(c+d+a)}+\frac{c}{2c+3(d+a+b)}+$$

$$+\frac{d}{2d+3(a+b+c)}\geq\frac{4}{11}.$$

BIBLIOGRAFIE

[1] M. O. Drîmbe, *Inegalităţi – idei şi metode*, Editura Gil, Zalău, 2003.
[2] M. Ganga, *Matematică, Manual pentru clasa a XI-a*, Editura Mathpress, 2006.

PENTRU CERCURILE DE ELEVI

ECUAŢII FUNCŢIONALE ECHIVALENTE CU ECUAŢIA LUI CAUCHY

VASILE POP[1)]

1. Introducere

Multe ecuaţii funcţionale, studiate într-o bibliografie bogată începând din 1821, au soluţiile exprimabile cu ajutorul funcţiilor aditive (soluţiile ecuaţiei lui *Cauchy*). Fără a intra în detalii privind proprietăţile funcţiilor aditive vom aborda câteva ecuaţii funcţionale echivalente cu ecuaţia lui *Cauchy*, a căror rezolvare foloseşte metode generale complet diferite şi trei ecuaţii echivalente cu ecuaţia lui *Jensen*: ecuaţia lui *Hosszú*, ecuaţia lui *T. Popoviciu* şi ecuaţia lui Davison.

2. Ecuaţia lui Cauchy

Definiţia 2.1. *Ecuaţia funcţională*

$$(C):\ f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\quad f(x+y)=f(x)+f(y),\forall\in\mathbb{R}$$

se numeşte ecuaţia lui Cauchy, iar soluţiile ei se numesc funcţii aditive.

[1)] Conferenţiar univ. dr., Universitatea Tehnică din Cluj-Napoca