şi

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + x^5 g_3(x)$$

conduce la:

$$x^2 e^{-x} = x^2 - x^3 + \frac{1}{2}x^4 + x^5 g_4(x).$$

PROBLEME PENTRU EXAMENE NAŢIONALE[1)]

Clasa a VII-a

1. Împărţind un număr natural la 12 obţinem restul 6. Ce rest obţinem dacă împărţim acelaşi număr la 4?

2. Fie a, b numere raţionale astfel încât $a + 2 + b\sqrt{3} = 3 + a\sqrt{3}$. Aflaţi valorile lui a şi b.

3. Media geometrică a numerelor pozitive x şi y este 12. Aflaţi numerele ştiind că x este de patru ori mai mare decât y.

4. În triunghiul isoscel ABC ($AB = AC$) măsura unghiului A este de 40^0. Aflaţi măsura unghiului format de bisectoarea unghiului B şi înălţimea din A.

5. Se ştie că $\triangle ABC \sim \triangle MNP$, raportul de asemănare fiind $\frac{AB}{MN} = 2$. Dacă aria $\triangle ABC$ este 4 cm^2, aflaţi aria $\triangle MNP$.

6. Un pătrat cu aria de 72 cm^2 este înscris într-un cerc. Aflaţi lungimea acestui cerc.

Clasa a VIII-a

7. Simplificaţi fracţia $\dfrac{(x+1)^2 + 2(x+1) + 1}{x^2 - 4}$.

8. Numerele x, y, z sunt direct proporţionale cu 2, 3 şi 4. Calculaţi $x + 2y - 2z$.

9. Se dă funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x - 5$. Găsiţi punctul, aparţinând graficului funcţiei, care are abscisa egală cu ordonata.

10. Dreapta AM este perpendiculară pe planul dreptunghiului $ABCD$. Ştiind că $AM = 3$ cm şi $MB = 6$ cm aflaţi măsura unghiului dintre planul (MBC) şi planul dreptunghiului.

11. Un cub are volumul egal cu 8 cm^3. Calculaţi aria totală a cubului.

[1)] La problemele din această rubrică nu se primesc soluţii.

12. Un tetraedru regulat are aria totală egală cu $36\sqrt{3}$ cm^2. Aflaţi volumul tetraedrului.

Clasa a IX-a

13. Să se determine numărul termenilor pozitivi ai progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$ cu $a_1 = 2012$ şi raţia $r = -5$.

14. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ o progresie geometrică având raţia $r = 2$. Notăm $S_m = a_1 + a_2 + \cdots + a_m$, oricare ar fi $m \geq 1$. Să se calculeze $\dfrac{S_6}{S_3}$.

15. Să se arate că pentru orice număr natural $n \geq 4$ avem inegalitatea $4^n - 2^n \geq 60n$.

16. Fie n un număr natural, $n \geq 2$. Să se calculeze:

$$\{n + \sqrt{n^2 - 1}\} + \left\{\frac{1}{n + \sqrt{n^2 - 1}}\right\},$$

unde $\{x\}$ este partea fracţionară a numărului real x.

17. Fie $ABCD$ un patrulater. Să se arate că vectorii $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$ şi $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DA}$ au acelaşi modul.

18. Considerăm un triunghi ABC şi fie punctele M, N definite prin $\overrightarrow{BM} = 4 \cdot \overrightarrow{MC}$, respectiv $\overrightarrow{AN} = \dfrac{1}{3} \cdot \overrightarrow{NC}$. Notăm cu S punctul de intersecţie a dreptelor BN şi AM. Să se calculeze $\dfrac{AS}{SM}$.

Clasa a X-a

19. Fie a şi b două numere reale strict mai mari decât 1. Să se arate că $a^{\sqrt{\log_a b}} = b^{\sqrt{\log_b a}}$.

20. Să demonstreze că $1 + \log_a b = \log_{a+b} a$ dacă şi numai dacă

$$\log_a x + \log_b x = \log_{a+b} x,$$

oricare ar fi $a, b, x > 1$.

21. Să se demonstreze identitatea $\left(\dfrac{1 + i\mathrm{tg}\alpha}{1 - i\mathrm{tg}\alpha}\right)^n = \dfrac{1 + i\mathrm{tg}n\alpha}{1 - i\mathrm{tg}n\alpha}$, unde $n \in \mathbb{N}^*$, iar α este un număr real pentru care $\mathrm{tg}\alpha$ şi $\mathrm{tg}n\alpha$ au sens.

22. Fie z_i, $i = 1, 2, 3, 4$, rădăcinile ecuaţiei $z^4 + z^2 + 1 = 0$. Să se arate că numerele z_i, $i = 1, 2, 3, 4$, sunt afixele vârfurilor unui dreptunghi.

23. Să se arate că funcţia $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(n) = n + (-1)^n$ este inversabilă.

24. Să se arate că funcţia $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f((n, m)) = 2^n \cdot 3^m$ este injectivă.

Clasa a XI-a

25. Fie permutarea $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ şi determinantul:

$$V(a,b,c) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix},$$

unde a, b, c sunt numere reale.

a) Să se arate că $V(a,b,c) = -V(c,b,a)$.

b) Să se demonstreze că avem egalitatea $V(1,2,3) = V(\sigma(1),\sigma(2),\sigma(3))$.

c) Să se determine cel mai mic număr natural nenul p pentru care $\sigma^p \cdot \sigma^{p+1} \neq e$.

26. Fie şirul de numere reale $(a_n)_{n\geq 1}$ definit prin $a_1 = 0$ şi $a_{n+1} = a_n + \dfrac{1}{n^2+n}$, oricare ar fi $n \geq 1$.

a) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n - a_{n+1}}{a_n - a_{n+2}}$.

b) Să se calculeze $\lim\limits_{m\to\infty} (\lim\limits_{n\to\infty} n(\sqrt[m]{a_n} - 1))$.

c) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n+a_n}{n+a_{n+1}}\right)^{\frac{1}{(1-a_n)^3}}$.

Clasa a XII-a

27. Fie mulţimea $G = \{f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f_a(x) = ax + 3 - 3a, a \in \mathbb{R}^*\}$.

a) Să se arate că oricare ar fi $g, h \in G$ avem $g \circ h \in G$.

b) Să se arate că G este grup în raport cu operaţia de compunere a funcţiilor.

c) Să se determine toate elementele de ordin finit ale grupului G.

28. Fie $I_n = \displaystyle\int_0^\pi \mathrm{e}^x \cos nx \mathrm{d}x$, $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Să se calculeze I_1.

b) Să se arate că $|I_n| \leq 80$, oricare ar fi $n \geq 1$.

c) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} I_n$.