ARTICOLE ŞI NOTE MATEMATICE

ASUPRA UNOR INEGALITĂŢI OMOGENE

Cristina Maria Militaru [1)]

Abstract. This article extends some homogenous inequalities where the variables have low exponents to arbitrary ones.

Keywords: inequality, *Cauchy - Schwarz, Satnoianu, Vo Quoc Ba Can*
MSC : 51M04.

În lucrările [1] şi [3] sunt prezente câteva inegalităţi omogene cu o formă asemănătoare: *dacă* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *sunt numere reale pozitive, atunci*:

$$\frac{a_1^2}{a_1+a_2}+\frac{a_2^2}{a_2+a_3}+\ldots+\frac{a_n^2}{a_n+a_1} \geq \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} a_i,\ n \geq 2, \tag{1}$$

$$\frac{a_1^3}{a_1+a_2}+\frac{a_2^3}{a_2+a_3}+\ldots+\frac{a_n^3}{a_n+a_1} \geq \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} a_i^2,\ n \geq 3, \tag{2}$$

$$\frac{a_1^3}{a_1^2+a_2a_3}+\frac{a_2^3}{a_2^2+a_3a_4}+\ldots+\frac{a_n^3}{a_n^2+a_1a_2} \geq \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} a_i,\ n \geq 3. \tag{3}$$

Primele două relaţii se pot demonstra, de exemplu, cu ajutorul inegalităţii lui *Cauchy-Buniakovski-Schwarz*, iar cea de-a treia este demonstrată în [2] prin însumarea unor inegalităţi de forma :

$$\frac{a_1^3}{a_1^2+a_2a_3} \geq \frac{4a_1-a_2-a_3}{4}.$$

Vom demonstra câteva inegalităţi care generalizează aceste relaţii.

Propoziţia 1. *Dacă* $n, p \in \mathbb{N}^*$, $a_1, a_2, \ldots, a_n > 0$, $k \geq p$, $n \geq p+1$, *atunci*:

$$\frac{a_1^{k+p}}{a_1^p+a_2a_3\ldots a_{p+1}}+\frac{a_2^{k+p}}{a_2^p+a_3a_4\ldots a_{p+2}}+\ldots+\frac{a_n^{k+p}}{a_n^p+a_1a_2\ldots a_p} \geq \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} a_i^k, \tag{4}$$

unde $a_{n+1}=a_1, a_{n+2}=a_2, \ldots, a_{n+p}=a_p$.

Propoziţia 2. *Dacă* $n, p \in \mathbb{N}^*$, $a_1, a_2, \ldots, a_n > 0$, $k \geq p$, $n \geq 2$, *atunci*:

$$\frac{a_1^{k+p}}{a_1^p+a_2^p}+\frac{a_2^{k+p}}{a_2^p+a_3^p}+\ldots+\frac{a_n^{k+p}}{a_n^p+a_1^p} \geq \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} a_i^k. \tag{5}$$

Egalitatea se obţine atunci când $a_1=a_2=a_3=\ldots=a_n$.

[1)] Profesor, Colegiul Naţional „Spiru Haret" Bucureşti

Demonstraţie . Pentru (4) folosim inegalitatea lui *Cauchy-Buniakovski-Schwarz*:

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^{k+p}}{a_i^p+a_{i+1}a_{i+2}\ldots a_{i+p}}\right)\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^{k-p}\left(a_i^p+a_{i+1}a_{i+2}\ldots a_{i+p}\right)\right)\geq$$

$$\geq\left(\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\frac{a_i^{k+p}}{a_i^p+a_{i+1}a_{i+2}\ldots a_{i+p}}}\cdot\sqrt{a_i^{k-p}\left(a_i^p+a_{i+1}a_{i+2}\ldots a_{i+p}\right)}\right)^2=\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^k\right)^2,$$

unde $a_{n+1}=a_1, a_{n+2}=a_2, \ldots, a_{n+p}=a_p$.

Este acum suficient să demonstrăm că:

$$\frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^k\right)^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^{k-p}(a_i^p+a_{i+1}a_{i+2}\ldots a_{i+p})}\geq\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^k}{2},$$

ceea ce este echivalent cu:

$$\sum_{i=1}^{n}a_i^k\geq\sum_{i=1}^{n}(a_i^{k-p}a_{i+1}a_{i+2}\ldots a_{i+p}). \tag{6}$$

Folosim acum inegalitatea ponderată a mediilor:

$$x_1^{\lambda_1}x_2^{\lambda_2}\ldots .x_n^{\lambda_n}\leq\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\ldots+\lambda_nx_n,\quad \lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n=1$$

şi obţinem inegalităţi de forma:

$$\frac{k-p}{k}a_i^k+\frac{1}{k}a_{i+1}^k+\ldots+\frac{1}{k}a_{i+p}^k\geq(a_i^k)^{\frac{k-p}{k}}\left(a_{i+1}^k\right)^{\frac{1}{k}}\ldots(a_{i+p}^k)^{\frac{1}{k}}=a_i^{k-p}a_{i+1}\ldots a_{i+p},$$

unde $i=\overline{1,n}$.

De aici, prin sumare, obţinem inegalitatea (6) şi astfel cerinţa este îndeplinită.

Analog, inegalitatea (5) se reduce la :

$$\sum_{i=1}^{n}a_i^k\geq\sum_{i=1}^{n}(a_i^{k-p}a_{i+1}^p). \tag{7}$$

Relaţia (7) se obţine prin însumarea inegalităţilor:

$$\frac{k-p}{k}a_i^k+\frac{p}{k}a_{i+1}^k\geq\left(a_i^k\right)^{\frac{k-p}{k}}\left(a_{i+1}^k\right)^{\frac{p}{k}}=a_i^{k-p}a_{i+1}^p,$$

unde $i=\overline{1,n}$.

Printr-un raţionament identic, obţinem:

Propoziţia 3. *Dacă* $n, p \in \mathbb{N}^*$, $\alpha, \beta > 0$, $a_1, a_2, \ldots, a_n > 0$, $k \geq p$, $n \geq p+1$, *atunci*:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^{k+p}}{\alpha a_i^p + \beta a_{i+1} a_{i+2} \ldots a_{i+p}} \geq \frac{a_1^k + a_2^k + \ldots + a_n^k}{\alpha + \beta}. \tag{8}$$

Propoziţia 4. *Dacă* $n, p \in \mathbb{N}^*$, $\alpha, \beta > 0$, $a_1, a_2, \ldots, a_n > 0$, $k \geq p$, $n \geq 2$, *atunci*:

$$\frac{a_1^{k+p}}{\alpha a_1^p + \beta a_2^p} + \frac{a_2^{k+p}}{\alpha a_2^p + \beta a_3^p} + \ldots + \frac{a_n^{k+p}}{\alpha a_n^p + \beta a_1^p} \geq \frac{a_1^k + a_2^k + \ldots + a_n^k}{\alpha + \beta}. \tag{9}$$

Prin substituţiile $a_i \to \dfrac{1}{a_i}$ se obţin inegalităţi duale ale acestora:

Corolar 1. În condiţiile propoziţiilor 3, respectiv 4:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_{i+1} a_{i+2} \ldots a_{i+p}}{\alpha a_i^k a_{i+1} a_{i+2} \ldots a_{i+p} + \beta a_i^{k+p}} \geq \frac{1}{\alpha + \beta} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i^k} \right), \quad n \geq p+1, \tag{10}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_{i+1}^p}{\alpha a_i^k a_{i+1}^p + \beta a_i^{k+p}} \geq \frac{1}{\alpha + \beta} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i^k} \right), \quad n \geq 2, \tag{11}$$

unde $a_{n+s} = a_s$, $s = 1, \ldots, p$, $n, p \in \mathbb{N}^*$, $\alpha, \beta > 0$, $a_1, a_2, \ldots, a_n > 0$, $k \geq p$.

Din păcate, metoda anterioară eşuează în cazul $1 \leq k < p$, problema devenind mult mai dificilă. Demonstrăm inegalitatea (5) pentru câteva cazuri particulare ale lui n, k, p:

- în cazul $n = 2$, $k \geq 0, p \geq 0$ inegalitatea (5) devine :

$$\frac{a^{k+p}}{a^p + b^p} + \frac{b^{k+p}}{b^p + a^p} \geq \frac{a^k + b^k}{2}, \quad a, b > 0, \tag{12}$$

care se reduce prin eliminarea numitorului la:

$$a^{k+p} + b^{k+p} - a^k b^p - a^p b^k \geq 0 \Leftrightarrow \left(a^k - b^k\right)(a^p - b^p) \geq 0,$$

ultima afirmaţie fiind evident adevărată.

- în cazul $k < p$, $n = 3, k = 1, p = 2$, inegalitatea (5) se scrie:

$$\frac{a^3}{a^2 + b^2} + \frac{b^3}{b^2 + c^2} + \frac{c^3}{c^2 + a^2} \geq \frac{a + b + c}{2}, \quad a, b, c > 0. \tag{13}$$

Pentru a o proba, putem presupune că $c = \max(a, b, c)$. Inegalitatea se mai scrie:

$$\frac{a(a^2 - b^2)}{a^2 + b^2} + \frac{b(b^2 - c^2)}{b^2 + c^2} + \frac{c(c^2 - a^2)}{c^2 + a^2} \geq 0.$$

Deoarece:

$$\frac{a(a^2 - b^2)}{a^2 + b^2} - \frac{b(a^2 - b^2)}{a^2 + b^2} = \frac{(a - b)^2 (a + b)}{a^2 + b^2} \geq 0,$$

este suficient să demonstrăm că:

$$\frac{b(a^2-b^2)}{a^2+b^2}+\frac{b(b^2-c^2)}{b^2+c^2}+\frac{c(c^2-a^2)}{c^2+a^2}\geq 0.$$

După aducerea la acelaşi numitor, aceasta se mai scrie:

$$\frac{2b^3(a^2-c^2)}{(a^2+b^2)(b^2+c^2)}+\frac{c(c^2-a^2)}{c^2+a^2}\geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (c^2-a^2)[c(b^2+c^2)(a^2+b^2)-2b^3(a^2+c^2)]\geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (c^2-a^2)(c-b)[2a^2b^2+b^2c(c-b)+a^2c^2+a^2bc]\geq 0,$$

ceea ce rezultă din $c=\max(a,b,c)$.

Precizăm că acest caz particular poate fi dedus şi din inegalitatea lui *Vo Quoc Ba Can* din [3]:

$$\frac{a^3}{a^2+b^2}+\frac{b^3}{b^2+c^2}+\frac{c^3}{c^2+a^2}\geq\frac{\sqrt{3(a^2+b^2+c^2)}}{2},\ a,b,c>0, \tag{14}$$

făcând verificarea:

$$\frac{\sqrt{3(a^2+b^2+c^2)}}{2}\geq\frac{a+b+c}{2}\Leftrightarrow (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\geq 0.$$

• În G.M.A., *V. Cîrtoaje* propune şi demonstrează prin metode elementare, dar laborioase, cazul $n=3, k=1, p=3$ al inegalităţii (5):

$$\frac{a^4}{a^3+b^3}+\frac{b^4}{b^3+c^3}+\frac{c^4}{c^3+a^3}\geq\frac{a+b+c}{2},\quad a,b,c>0.\qquad\square \tag{15}$$

Observăm că pentru $k=1$, $p=n-1$ inegalitatea (4) devine:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^n}{a_i^{n-1}+a_1a_2\ldots a_{i-1}a_{i+1}\ldots a_n}\geq\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{2},$$

$a_1,a_2,\ldots,a_n>0$, $n\geq 2$. Cazul $n=2$ al acestei inegalităţi este adevărat conform lui (1), iar cazul $n=3$ rezultă din inegalitatea (3).

Pe de altă parte, dând valorile $a_1=2$, $a_2=\ldots=a_n=1$, inegalitatea conduce la $2^{n-1}(7-n)\geq n+5$, prin urmare ea este falsă pentru $n\geq 7$.

În cazurile $n\in\{4,5,6\}$ inegalitatea este adevărată; demonstraţia pentru aceste cazuri va apărea într-un alt articol.

Prin înlocuirea lui 2 cu $\alpha+\beta$ şi punând câteva condiţii suplimentare vom demonstra aici o inegalitate mai slabă, care este valabilă pentru orice $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$:

Propoziţia 5. *Dacă* $n\in\mathbb{N}, n\geq 2$, $\alpha,\beta>0$, $a_1,a_2,\ldots,a_n>0$, $\beta\geq(n-1)\,\alpha$, *atunci*:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^n}{\alpha a_i^{n-1}+\beta a_1a_2\ldots a_{i-1}a_{i+1}\ldots a_n}\geq\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{\alpha+\beta}. \tag{16}$$

Pentru demonstrarea Propoziţiei 5 ne vom baza pe următorul rezultat obţinut de *Răzvan Satnoianu*, în [5]:

Teoremă. *Pentru orice* $n \in \mathbb{N}^*$, $p \geq 1$, $\alpha, \beta > 0$, $x_1, x_2, \ldots, x_n > 0$, *cu* $\beta \geq (n^p - 1)\,\alpha$, *avem inegalitatea*:

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i^{n-1}}{\alpha x_i^{n-1} + \beta \prod\limits_{k \neq i} x_k} \right)^{\frac{1}{p}} \geq \frac{n}{(\alpha+\beta)^{\frac{1}{p}}}. \tag{17}$$

Inegalitatea (17) este de fapt o generalizare a unei probleme propusă de Coreea la a 42-a O.I.M., Washington, 2001, care a generat numeroase dezbateri, soluţii şi generalizări şi care are enunţul:

Dacă $a, b, c > 0$, *avem inegalitatea*:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \geq 1.$$

Demonstraţia inegalităţii (16). Deoarece inegalitatea este simetrică, putem presupune că $a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n$. Observăm că, în acest caz, obţinem şirul ordonat:

$$\frac{a_1^{n-1}}{\alpha a_1^{n-1} + \beta a_2 a_3 \ldots a_n} \leq \frac{a_2^{n-1}}{\alpha a_2^{n-1} + \beta a_1 a_3 a_4 \ldots a_n} \leq$$
$$\leq \ldots \leq \frac{a_n^{n-1}}{\alpha a_n^{n-1} + \beta a_1 a_2 \ldots a_{n-1}}.$$

Sunt astfel îndeplinite condiţiile din inegalitatea lui *Cebâşev*, deci:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^n}{\alpha a_i^{n-1} + \beta \prod\limits_{k \neq i} a_k} \geq \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \right) \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^{n-1}}{\alpha a_i^{n-1} + \beta \prod\limits_{k \neq i} a_k} \right).$$

Din inegalitatea (17) pentru $p = 1$ avem:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^n}{\alpha a_i^{n-1} + \beta \prod\limits_{k \neq i} a_k} \geq \frac{1}{n} \cdot \frac{n}{\alpha+\beta} \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \right) = \frac{1}{\alpha+\beta} \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \right),$$

deci (16) este demonstrată. □

Rămâne o problemă deschisă pentru ce valori ale lui $n \in \mathbb{N}, n \geq 4$ şi $1 \leq k < p$, sunt adevărate inegalităţile (4) şi (5).

Aplicaţie

Dacă $n \in \mathbb{N}^*$, $\alpha, \beta > 0$, $x_1, x_2, \ldots, x_n > 0$, $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1$, atunci:

$$\frac{x_1^3}{\alpha x_1 + \beta x_2} + \frac{x_2^3}{\alpha x_2 + \beta x_3} + \ldots + \frac{x_n^3}{\alpha x_n + \beta x_1} \geq \frac{1}{n(\alpha+\beta)}.$$

Test selecţie O.I.M., Moldova, 2002

Soluţie. Din Propoziţia 3 şi din inegalitatea dintre media pătratică şi cea aritmetică avem:

$$\frac{x_1^3}{\alpha x_1+\beta x_2}+\frac{x_2^3}{\alpha x_2+\beta x_3}+\ldots+\frac{x_n^3}{\alpha x_n+\beta x_1}\geq\frac{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}{\alpha+\beta}\geq$$

$$\geq\frac{(x_1+x_2+\ldots+x_n)^2}{n(\alpha+\beta)}=\frac{1}{n(\alpha+\beta)}.$$

BIBLIOGRAFIE

[1] L. Panaitopol, V. Băndilă, M. Lascu, *Inegalităţi*, Editura Gil, Zalău, 1996.

[2] M. Onucu Drimbe, *Inegalităţi, idei şi metode*, Ed. Gil, Zalău, 2003.

[3] Vo Quoc Ba Can, C. Pohoaţă, *Old and New Inequalities*, Vol.2, Ed. Gil, Zalău, 2008

[4] V. Cîrtoaje, *Problema 222*, Gazeta Matematică - Seria A, nr. 2/2007.

[5] R. Satnoianu, *Improved GA-convexity*, J. Ineq. Pure & Appl Math, article 82, issue 5, volume 3 (2002), versiunea electronică la http:/ jipam.vu.edu.au/v3n5/08702.html

[6] T. Andreescu, *Şase soluţii ale unei probleme de O.I.M.*, Gazeta Matematică - Seria B, nr. 1/2002.

[7] W. Janous, *On a conjecture of Răzvan Satnoianu*, Gazeta Matematică- Seria A, nr. 2, XX (XCIX), 2002.

[8] M. Dincă, *Generalizarea celei de-a doua probleme date la a 42-a OIM*, Gazeta Matematică - Seria B, nr. 3/2002.

[9] A. Stadler, Minghua Lin, *A Simple Proof of Satnoianu's Inequality*, Gazeta Matematică - Seria B, nr. 3/2010.

CÂTEVA INEGALITĂŢI UTILE PENTRU OLIMPIADE

DOREL BĂIŢAN[1)]

Abstract. The article shows how to use geometric substitutions when proving certain inequalities.

Keywords: Inequalities, Gerretsen inequality.

MSC : 26D99.

Prezenta lucrare cuprinde câteva inegalităţi mai dificile, publicate şi demonstrate în revista „Mathematical Reflections“ (M.R.), la care vom prezenta propria noastră demonstraţie.

Problema 1. (M.R. nr. 5/2006, problema S25). *Să se arate că în orice triunghi ascuţitunghic există inegalitatea trigonometrică*:

$$\cos^3 A+\cos^3 B+\cos^3 C+\cos A\cos B\cos C\geq\frac{1}{2}.$$

Demonstraţie. Utilizând identitatea:

$$\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C+2\cos A\cos B\cos C=1,$$

1) Dr.ing., ROMTELECOM S.A., Bucureşti